

# Постановка задачи широкополосного согласования пьезопреобразователя с активной нагрузкой и способы ее решения

Сырцов А. А., Бархатов В. А.

Сделана общая постановка проблемы широкополосного согласования пьезопреобразователя и усилителя с произвольным активным сопротивлением. Результаты исследования позволяют решить положительно образом эту задачу при определенных ограничениях на электрофизические параметры пьезопреобразователя. Приведен общий алгоритм решения практической задачи согласования, начиная от измерения соответствующих электрофизических параметров пьезопреобразователя. Для эквивалентной RC-схемы пьезопреобразователя найдено предельное значение коэффициента расширения при использовании чебышевского фильтра.

## § I. Общая постановка проблемы

Задача согласования различных радиотехнических устройств является достаточно общей для различных областей радиотехники. В радиотехнике критерием согласования является отдаваемая в нагрузку мощность. Естественное условие оптимального согласования – равенство сопротивления источника комплексно-сопряженному сопротивлению нагрузки – не может быть выполнено для реальных устройств во всей полосе частот. Проблема расширения полосы пропускания радиотехнических устройств особенно актуальна в тех случаях, когда требуется передать короткий импульс без искажения или с минимальными искажениями. Не являются в этом смысле исключением и акустические пьезоэлектрические преобразователи.

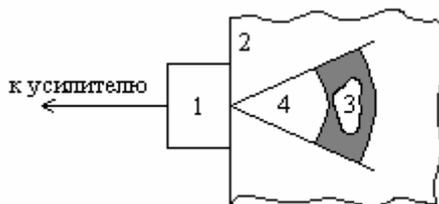


Рис. I.1. Неопределенность положения отражателя в объекте контроля. Здесь обозначено: 1 – пьезопреобразователь, 2 – объект контроля, 3 – отражатель, 4 – акустическое поле, затемненная область – область неопределенности

Для акустических пьезоэлектрических преобразователей (далее – пьезопреобразователей) ширина полосы пропускания является лимитирующим фактором информативности метода контроля. Акустическое поле характеризуется направленностью и протяженностью, поэтому неопределенность положения отражателя складывается из неопределенности "радиальной" и "угловой" (рис. I.1). "Радиальная" неопределенность в электрическом смысле детерминирована шириной полосы пропускания. Если бы ультразвуковой дефектоскоп мог обрабатывать дельта-импульс, т.е. импульс с неограниченным спектром, то не существовало бы никакой "радиальной" неопределенности. В этом случае была бы возможна локализация отражателя любой сколь угодно малой толщины на сколь угодно малой глубине. Поэтому чем шире полоса пропускания, тем более короткий импульс по времени может быть обработан, а соответственно более точно локализован отражатель в объекте контроля. "Угловая" неопределенность определяется геометрическими свойствами преобразователя, и ее устранение не входит в рассмотрение данной статьи.

В настоящей статье лишь рассматривается сама возможность проблемы широкополосного согласования. При этом, никакого конкретного алгоритма реализации (синтеза) согласующей цепи, приводящего к конечному результату, для наиболее общего случая эквивалентной схемы преобразователя и оптимизируемого коэффициента преобразования мощности не дается. Однако ниже приводится порядок решения задачи широкополосного согласования.

В своем самом общем виде проблему согласования пьезопреобразователя с активной нагрузкой можно расчленить на четыре достаточно самостоятельные части.

Общий вид пьезопреобразователя представлен на рис. 1.2. Каждый из входящих в эту схему элементов имеет определенный физический смысл. Пьезопреобразователь, работая на прием, воспринимает внешнее воздействие в виде звукового давления, которое трансформируется за счет пьезоэлектрического эффекта в ЭДС – электрический сигнал. Поэтому генератор на входе схемы рис. 1.2. – это, фактически, источник механических колебаний с коэффициентом электромеханической связи, т.е. имеет неэлектрическую природу – его внутренний механизм – пьезоэлектрический эффект. Сопротивление  $R_i$  характеризует активные потери, скажем необратимое рассеяние мощности. Четырехполюсник включает в себя лишь реактивные элементы. Наличие реактивных элементов характеризует динамические свойства ПП (колебательные).

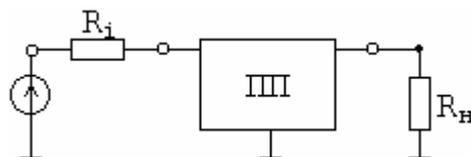


Рис. 1.2. Представление пьезопреобразователя в виде активного сопротивления  $R_i$ , соединенного с четырехполюсником ПП. Пьезопреобразователь нагружен на активное сопротивление  $R_n$

Сразу отметим тот факт, что представление пьезопреобразователя в виде реактивного четырехполюсника и чисто активного внутреннего сопротивления источника является существенным допущением с нашей стороны. Тем не менее, это допущение дает надежду на возможность сколько-нибудь разумного аналитического решения проблемы согласования с возможностью дальнейшего анализа.

Из рассмотренного видно, что решение основной задачи – широкополосного согласования – ставит перед нами задачу промежуточную, без которой, однако, дальнейшая теория бессмысленна, а именно – определение  $Z$ -параметров четырехполюсника ПП. Знание  $Z$ -параметров дает возможность аппроксимировать эти экспериментальные данные некоторой теоретической моделью.

Все  $Z$ -параметры определяются как обычно из опытов холостого хода. В принципе можно измерить параметры  $Z_{22}$ ,  $Z_{12}$  (учитывая, что для пассивных систем  $Z_{12} = Z_{21}$ ). Параметр  $Z_{11}$  остается экспериментально неопределенным. Его значение определяется теоретически после составления эквивалентной схемы четырехполюсника ПП и определения значений всех элементов.

Топология четырехполюсника ПП составляется сообразно физическому смыслу элементов, в него входящих. После того как топология определена, следует определение значений входящих в четырехполюсник элементов. Определить значения элементов можно, скажем методом наименьших квадратов таким образом, чтобы сумма квадратов отклонения теоретических значений от экспериментальных была наименьшей. Эти манипуляции позволят в конечном итоге определить неизвестный параметр  $Z_{11}$ . Здесь особо следует отметить тот факт, что сколь угодно точное приближение теоретической модели к экспериментальным данным, во всяком случае с помощью конечного числа элементов цепи на всем множестве экспериментальных данных по любой из распространенных метрик, видимо невозможно. Хотя с математической точки зрения это значит, что точки пространства экспериментальных данных не являются не то что внутренними, но даже не являются предельными, для практических нужд такое явление отсутствия сильной сходимости модели, однако не является препятствием к принятию полученной модели.

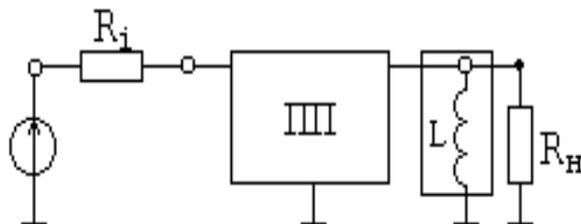


Рис. 1.3. Использование индуктивности  $L$  в качестве простейшего согласующего четырех-полюсника

Таким образом, матрицу  $Z$ -параметров можно считать определенной. На этом экспериментальная часть заканчивается.

Следующим шагом является выбор согласующей цепи. Под выбором цепи следует понимать выбор топологии и определение номиналов выбранных элементов. Определенных успехов на этом поприще можно добиться, подбирая согласующий четырехполюсник экспериментально, что называется методом "тыка". Это, так сказать, экстенсивный путь. Другой путь – аналитический. Вообще, наиболее простым согласующим четырехполюсником является катушка индуктивности, включенная как показано на рис. 1.3. Такая схема широко используется при согласовании пьезопреобразователя с входом усилителя. Индуктивность выбирается таким образом, чтобы нейтрализовать емкости. Такая схема не дает расширения полосы пропускания – оптимальная передача мощности происходит лишь на резонансной частоте и в ее малой окрестности. Так, для пьезопреобразователя с резонансной частотой 5 МГц оптимальное согласование будет достигаться в полосе 4 – 6 МГц. Более общая же постановка задачи предполагает оптимальную передачу мощности от источника к нагрузке (усилителю) в полосе пропускания с предполагаемой возможностью расширения последней.

Согласование по критерию оптимальной передачи мощности в нагрузку предполагает использование коэффициента преобразования (отражения) мощности, подробнее о котором написано ниже. В настоящей статье для исследования возможности широкополосного согласования вводится понятие матрицы рассеяния, заимствованное из теории линий передач СВЧ-колебаний. В следующих пунктах подробно выводятся необходимые для построения теории соотношения.

От «специалистов», занимающихся проектированием современных радиоэлектронных устройств, можно услышать мнение, что LC-реализации согласующих цепей сложны и давно устарели. Да, действительно, реализация LC-цепей сложна, но не стоит забывать, что, скажем, выходное сопротивление пьезопреобразователя или какой-нибудь другой цепи является комплексным, а активное сопротивление нагрузки (например, входное сопротивление усилителя) далеко не всегда равно активной части выходного сопротивления. Разного рода транзисторные усилители, схемы операционного усиления и т.п. не дают оптимального согласования в полосе частот, кроме того не может быть и речи о расширении частотной полосы с помощью данных устройств. Неприменимы они и при больших амплитудах (100 – 400 В) возбуждаемого сигнала. И хотя LC-цепи не являются панацеей в борьбе за оптимальное согласование (тем более в вопросах акустического контроля), тем не менее они до сих пор играют весьма важную роль в современной радиотехнике.

Отметим, что все утверждения данной статьи приведены без доказательств, которые можно найти в большинстве работ по теории цепей.

## § II. Математический аппарат

В связи с тем, что реактивные сопротивления комплексны и во многих выражениях круговая частота  $\omega$  входит с мнимой единицей, естественно требуется продолжить частоту с действительной оси на всю комплексную плоскость. Поэтому вводится комплексная частота  $p$  – так называемый оператор Лапласа:  $p = \sigma + i \cdot \omega$ . В вопросах, касающихся нулей или полюсов функций, вообще говоря комплексных, требуется именно такое определение ком-

плексной частоты. Хотя естественно, что подлинный физический смысл имеет именно круговая частота  $w$ . Отождествление комплексной частоты  $p$  с чисто мнимой  $i \cdot w$  возможно лишь в случае чисто мнимых нулей и полюсов (т. е. в случае отсутствия потерь). Во всех случаях, когда нас не будут интересовать нули и полюса определенных функций, просто будем полагать  $p = i \cdot w$ . Следует иметь в виду, что  $F^*(p) \equiv F(-p)$  для скалярных функций. Для векторов и матриц  $\|A_{ij}(p)\|^* = \|\overline{A_{ij}(p)}\|^T$ . Эрмитовой матрицей называется матрица такая, что  $\|A_{ij}(p)\| = \|A_{ij}(p)\|^*$ . Для случая вещественных матриц это соответствует понятию симметричности.

Если матрица не является эрмитовой, то всегда можно выделить ее эрмитову часть. Действительно, представим матрицу  $\|A_{ij}(p)\|$  в виде

$$\|A_{ij}(p)\| = \operatorname{Re} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] + i \cdot \operatorname{Im} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right], \quad (1)$$

тогда

$$\|A_{ij}(p)\|^* = \operatorname{Re} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] - i \cdot \operatorname{Im} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right]. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \|A_{ij}(p)\| + \|A_{ij}(p)\|^* &= \operatorname{Re} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] + i \cdot \operatorname{Im} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] + \operatorname{Re} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] - i \cdot \operatorname{Im} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] = \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] + \operatorname{Re} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] \right\} + i \cdot \left\{ \operatorname{Im} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] - \operatorname{Im} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] \right\}. \end{aligned}$$

Полученная матрица является эрмитовой, так как

$$\begin{aligned} \left[ \|A_{ij}(p)\| + \|A_{ij}(p)\|^* \right]^* &= \left\{ \operatorname{Re} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] + \operatorname{Re} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] \right\} - i \cdot \left\{ \operatorname{Im} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] - \operatorname{Im} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] \right\} = \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] + \operatorname{Re} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] \right\} + i \cdot \left\{ \operatorname{Im} \left[ \|A_{ij}(p)\| \right] - \operatorname{Im} \left[ \|A_{ji}(p)\| \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как в эрмитова матрица должна совпадать со своей эрмитовой частью, то окончательно эрмитова часть матрицы  $\|A_{ij}(p)\|$  вводится как

$$\|A_{ij}(p)\|_9 = \frac{1}{2} \left[ \|A_{ij}(p)\| + \|A_{ij}(p)\|^* \right].$$

Пусть, например, матрица  $\|A_{ij}(p)\|$  равна:

$$\|A_{ij}(p)\| = \begin{vmatrix} r_1 + r_2 & r_2 \\ r_2 + \frac{a}{p \cdot C} & r_2 + \frac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix}$$

Найдем ее эрмитову часть:

$$\begin{aligned} \|A_{ij}(p)\|_9 &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{cc} r_1 + r_2 & r_2 \\ r_2 + \frac{a}{(\sigma + i \cdot w) \cdot C} & r_2 + \frac{1}{(\sigma + i \cdot w) \cdot C} \end{array} \right\| + \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{cc} r_1 + r_2 & r_2 + \frac{a}{(\sigma - i \cdot w) \cdot C} \\ r_2 & r_2 + \frac{1}{(\sigma - i \cdot w) \cdot C} \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} r_1 + r_2 & r_2 + \frac{a \cdot (\sigma + i \cdot w)}{2 \cdot (\sigma^2 + w^2) \cdot C} \\ r_2 + \frac{a \cdot (\sigma - i \cdot w)}{2 \cdot (\sigma^2 + w^2) \cdot C} & r_2 + \frac{\sigma}{(\sigma^2 + w^2) \cdot C} \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Не трудно убедиться, что матрица  $\|A_{ij}(p)\|_9$  эрмитова.

Эрмитова матрица  $\|A_{ij}(p)\|$  называется неотрицательно определенной, если  $\forall \|X_i(p)\| \neq 0$  квадратичная форма  $\|X_i(p)\|^* \cdot \|A_{ij}(p)\| \cdot \|X_j(p)\|$  неотрицательно определена, т.е.

$$\forall \|X_i(p)\| \neq 0 \quad \|X_i(p)\|^* \cdot \|A_{ij}(p)\| \cdot \|X_j(p)\| \geq 0.$$

Эрмитова матрица  $\|A_{ij}(p)\|$  называется неотрицательно определенной, если  $\forall \|X_i(p)\|$  квадратичная форма  $\|X_i(p)\|^* \cdot \|A_{ij}(p)\| \cdot \|X_j(p)\|$  неотрицательно определена, т.е.

$$\forall \|X_i(p)\| \neq 0 \quad \|X_i(p)\|^* \cdot \|A_{ij}(p)\| \cdot \|X_j(p)\| > 0.$$

### § III. Коэффициент преобразования мощности

Для дальнейшего значительную роль будет играть понятие коэффициента передачи мощности от источника к нагрузке (либо наоборот – от нагрузки к источнику). Для общности будем называть коэффициент передачи мощности коэффициентом преобразования (мощности). Хотя, конечно, это вопрос терминологии – не более.

Коэффициент преобразования мощности  $G(w^2)$  определяется как отношение средней мощности, поступающей в нагрузку, к максимально достижимой средней мощности источника. Он зависит от параметров четырехполюсника, сопротивления нагрузки и сопротивления источника. Коэффициент преобразования мощности есть наиболее информативная характеристика возможности передачи мощности четырехполюсником, так как связывает мощность, поступающую в нагрузку с мощностью  $P_u$ , которую источник способен отдать при оптимальных условиях.

$$P_u = \frac{1}{2} \cdot |U_{\Gamma}| \cdot |I_1|$$

Мощность, выделяющаяся в нагрузке

$$P_n = |I_2|^2 \cdot \text{Re}[z_n].$$

В четырехполюсник ПП наибольшая мощность поступает при условии

$$z_i = \bar{Z}_{ex},$$

где  $Z_{ex}$  – входное сопротивление четырехполюсника ПП, нагруженного на сопротивление  $z_n$ .  
С учетом этого

$$G = \frac{P_H}{P_u} = \frac{4 \cdot |I_2| \cdot \operatorname{Re}[z_H] \cdot \operatorname{Re}[z_i]}{|U_\Gamma|^2}. \quad (\text{III.1})$$

Выразим далее ток  $I_2$  через напряжение  $U_\Gamma$ . Для этого воспользуемся  $Z$ -параметрами четырехполюсника:

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2,$$

а так же тем, что

$$I_1 = \frac{U_\Gamma}{z_i + Z_{\text{ex}}}, \quad I_2 = -\frac{U_2}{z_H},$$

откуда получаем:

$$I_2 = -\frac{z_{21} \cdot U_\Gamma}{(z_H + z_{22}) \cdot (z_i + Z_{\text{ex}})}. \quad (\text{III.2})$$

Входное  $Z_{\text{ex}}$  сопротивление связано с  $Z$ -параметрами четырехполюсника и импедансом  $z_H$  соотношением

$$Z_{\text{ex}} = \frac{z_{11} \cdot (z_H + z_{22}) - z_{12} \cdot z_{21}}{(z_H + z_{22})}. \quad (\text{III.3})$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), сразу получаем

$$G = \frac{P_H}{P_u} = \frac{2 \cdot |z_{21}|^2 \cdot \operatorname{Re}[z_H] \cdot \operatorname{Re}[z_i]}{|(z_i + z_{11}) \cdot (z_{22} + z_H) - z_{12} \cdot z_{21}|^2}$$

Для простоты комплексная частота  $p$  как аргумент фигурирующих в этом пункте функций опущена во всех выражениях.

## § IV. Матрица рассеяния четырехполюсной цепи

### § IV.1. Зависимая от базиса матрица рассеяния четырехполюсной цепи

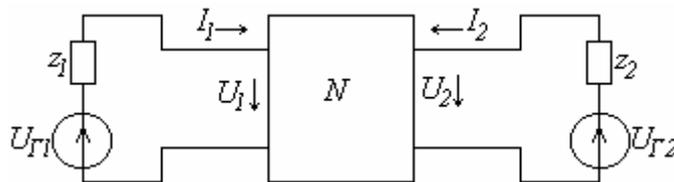


Рис. 1.1. Общее представление четырехполюсника  $N$  (в самом общем случае  $U_{\Gamma 2} \neq 0$ ). Четырехполюсник  $N$  состоит из каскадно соединенных четырехполюсников – ПП и СЦ.

Рассмотрим четырехполюсник  $N$ , изображенный на рис. 1.1. Четырехполюсник характеризуется своими параметрами холостого хода  $\|Z_{ij}(p)\|$ . Следует учесть, что четырехполюсник  $N$  состоит из двух каскадно-соединенных четырехполюсников: ПП и собственно согласующего четырехполюсника СЦ. Несмотря на тот факт, что непосредственно нам не потребуются  $Z$ -параметры составного четырехполюсника, тем не менее, ниже приводятся соотношения, связывающие  $Z$ -параметры каскадно-соединенных четырехполюсников:

$$\|\mathbf{Z}_{ij}\| = \frac{1}{Z_{11}^{CC} + Z_{22}^{PP}} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11}^{PP} Z_{11}^{CC} + Z_{11}^{PP} Z_{22}^{PP} - Z_{12}^{PP} Z_{21}^{PP} & Z_{21}^{PP} Z_{21}^{CC} \\ Z_{21}^{PP} Z_{21}^{CC} & Z_{11}^{CC} Z_{22}^{CC} - Z_{12}^{CC} Z_{21}^{CC} + Z_{22}^{PP} Z_{22}^{CC} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Диагональная матрица вида

$$\|\mathbf{z}_{ij}(p)\| = \begin{pmatrix} z_1(p) & 0 \\ 0 & z_2(p) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

каждый элемент которой является базисным сопротивлением  $z_k(p)$   $k$ -й пары зажимов, называется матрицей базисных сопротивлений цепи. Напряжение на зажимах, токи и источники выражаются соответственно векторами:

$$\|\mathbf{U}_i(p)\| = \begin{pmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{I}_i(p)\| = \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix} \quad \|\mathbf{U}_i(p)\|_\Gamma = \begin{pmatrix} U_{1\Gamma}(p) \\ U_{2\Gamma}(p) \end{pmatrix}$$

Они связаны матричным уравнением

$$\|\mathbf{U}_i(p)\|_\Gamma = \|\mathbf{U}_i(p)\| + \|\mathbf{z}_{ij}(p)\| \cdot \|\mathbf{I}_j(p)\| = \|\mathbf{Z}_{ij}(p) + \mathbf{z}_{ij}(p)\| \cdot \|\mathbf{I}_j(p)\|. \quad (1.3)$$

Эрмитова часть матрицы  $\mathbf{z}(p)$  имеет вид

$$\|\mathbf{r}_{ij}(p)\| = 0.5 \cdot \left[ \|\mathbf{z}_{ij}(p)\| + \|\mathbf{z}_{ij}(p)\|^* \right] \quad (1.4)$$

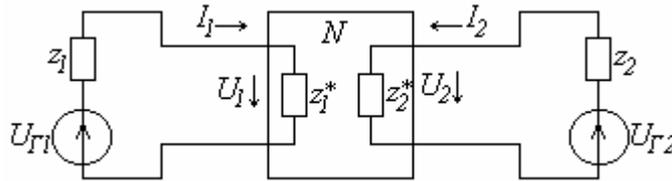


Рис. 1.2. Схема оптимального согласования для четырехполюсной цепи

В теории длинных линий вводятся понятия падающей и отраженной волн (тока и напряжения). Применим эти же понятия падающей и отраженной волн тока и напряжения.

Тогда напряжение или ток на входных и выходных зажимах четырехполюсника  $N$  представляется как сумма напряжений или токов падающей (распространяющейся в положительном направлении) и отраженной (распространяющейся в отрицательном направлении) волны.

Введем векторы падающего напряжения  $\|\mathbf{U}_i(p)\|_n$  и падающего тока  $\|\mathbf{I}_i(p)\|_n$ . Эти векторы представляют собой напряжения  $U_1(p)_n$ ,  $U_2(p)_n$  и токи  $I_1(p)_n$ ,  $I_2(p)_n$ , которые возникли бы на зажимах четырехполюсника при условии оптимального согласования, как показано на рис. 1.2. Это дает

$$\|\mathbf{U}_i(p)\|_n = \|\mathbf{z}_{ji}(p)\|^* \cdot \|\mathbf{I}_j(p)\|_n; \quad \|\mathbf{I}_i(p)\|_n = 0.5 \cdot \|\mathbf{r}_{ji}(p)\|^{-1} \cdot \|\mathbf{U}_i(p)\|_\Gamma \quad (1.5)$$

Вектор отраженного напряжения  $\|U_i(p)\|_o$  вектор отраженного тока  $\|I_i(p)\|_o$  определим соотношениями

$$\|U_i(p)\|_o = \|U_i(p)\| - \|U_i(p)\|_n; \quad -\|I_i(p)\|_o = \|I_i(p)\| - \|I_i(p)\|_n. \quad (1.6)$$

Матрица, связывающая вектор отраженного напряжения  $\|U_i(p)\|_o$  с вектором падающего напряжения  $\|U_i(p)\|_n$

$$\|U_i(p)\|_o = \|S_{ij}^U(p)\| \cdot \|U_j(p)\|_n \quad (1.7)$$

называется матрицей рассеяния по напряжению. Аналогично матрица, связывающая вектор отраженного тока  $\|I_i(p)\|_o$  вектором падающего тока  $\|I_i(p)\|_n$

$$\|I_i(p)\|_o = \|S_{ij}^I(p)\| \cdot \|I_j(p)\|_n \quad (1.8)$$

называется матрицей рассеяния по току.

Элементы матриц  $\|S_{ij}^U(p)\|$  и  $\|S_{ij}^I(p)\|$  называются параметрами рассеяния четырехполюсника. Из (1.5) – (1.8) совместно с (1.2) можно вывести выражение для  $\|S_{ij}^U(p)\|$  и  $\|S_{ij}^I(p)\|$  через матрицы  $\|Z_{ji}(p)\|$  и  $\|z_{ji}(p)\|$ :

$$\begin{aligned} \|I_i(p)\|_o &= -\|I_i(p)\| + \|I_i(p)\|_n = -\left[\|Z_{ji}(p)\| + \|z_{ji}(p)\|\right]^{-1} \cdot \|U_j(p)\|_n + \|I_i(p)\|_n = \\ &= \left\{ \|E_{ij}(p)\| - 2 \cdot \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \|r_{kj}(p)\| \right\} \cdot \|I_j(p)\|_n, \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} \|S_{ij}^I(p)\| &= \|E_{ij}(p)\| - 2 \cdot \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \|r_{kj}(p)\| = \\ &= \|E_{ij}(p)\| - \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|z_{kj}(p)\| + \|z_{kj}(p)\|^*\right] = \\ &= \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|Z_{kj}(p)\| + \|z_{kj}(p)\|\right] - \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|z_{kj}(p)\| + \|z_{kj}(p)\|^*\right] = \\ &= \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|Z_{kj}(p)\| - \|z_{kj}(p)\|^*\right] \end{aligned}$$

или окончательно

$$\|S_{ij}^I(p)\| = \left[\|Z_{ki}(p)\| + \|z_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|Z_{kj}(p)\| - \|z_{kj}(p)\|^*\right].$$

Подобным же образом можно показать, что

$$\|S_{ij}^U(p)\| = -\left[\|Y_{ki}(p)\| + \|y_{ki}(p)\|\right]^{-1} \cdot \left[\|Y_{kj}(p)\| - \|y_{kj}(p)\|^*\right],$$

где

$$\|Y_{ij}(p)\| = \|Z_{ji}(p)\|^{-1}, \quad \|y_{ij}(p)\| = \|z_{ji}(p)\|^{-1}.$$

При условии оптимального согласования по мощности  $\|Z_{kj}(p)\| = \|z_{kj}(p)\|^{-1}$  обе матрицы рассеяния становятся равными нулю, и это показывает, что векторы отраженных напряжения и тока служат мерой отклонения действующих напряжений и токов на зажимах от их значений при оптимальном согласовании по мощности.

Матрицы рассеяния по напряжению и току, вообще говоря, не симметричны даже для взаимных цепей. Эта трудность легко устраняется путем комплексной нормировки, которая будет рассмотрена в следующем пункте. Помимо преимущества такой "симметризации", нормированная матрица рассеяния имеет еще одно, а именно: физический смысл матрицы рассеяния становится более прозрачным, и, соответственно этому расширяются возможности ее практического применения.

#### § IV.2. Независимая от базиса матрица рассеяния четырехполюсной цепи

Введенные выше матрицы рассеяния базируются на отношении токов либо напряжений. Соответственно этому можно выделить базис напряжений либо базис токов. Далее введем такую нормировку, чтобы нормированная матрица стала независимой от базиса.

Представим  $k$ -е базисное сопротивление из (1.1) в виде отношения двух полиномов:

$$z_k(p) = \frac{\Psi(p)}{\Phi(p)}, \quad k = 1, 2.$$

тогда эрмитова часть  $k$ -го базисного сопротивления из (1.3) будет иметь вид:

$$r_k(p) = \frac{\Psi(p) \cdot \Phi^*(p) + \Psi^*(p) \cdot \Phi(p)}{2\Phi(p) \cdot \Phi^*(p)}, \quad k = 1, 2$$

и это показывает, что  $r_k(p)$  есть отношение двух четных полиномов. Таким образом, нули и полюса  $r_k(p)$  должны располагаться в квадрантной симметрии. Поэтому возможно единственное разложение  $r_k(p)$  на множители  $h_k(p)$  и  $h_k^*(p)$ , если:

- 1)  $h_k(p)$  – аналитическая в открытой правой полуплоскости;
- 2)  $h_k^*(p)$  – аналитическая функция в закрытой левой полуплоскости;
- 3)  $h_k(p)$  – отношение двух полиномов минимальной степени.

Определим вектор нормированной падающей волны и вектор нормированной отраженной волны соответственно как

$$\|a_i(p)\| = \|h_{ji}(p)\|^* \cdot \|I_j(p)\|_n; \quad \|b_i(p)\| = \|h_{ij}(p)\| \cdot \|I_j(p)\|_o.$$

Тогда нормированная отраженная и падающая волна связаны нормированной матрицей рассеяния:

$$\|b_i(p)\| = \|S_{ij}(p)\| \cdot \|a_j(p)\|. \quad (2.1)$$

Элементы матрицы  $\|S_{ij}(p)\|$  называются нормированными параметрами рассеяния четырехполюсника. Подобно зависимым от базиса матрицам рассеяния матрица  $\|S_{ij}(p)\|$  может быть выражена через матрицу сопротивлений  $\|Z_{ij}(p)\|$  и матрицу базисных сопротивлений  $\|z_{ij}(p)\|$ :

$$\|\mathbf{b}_i(p)\| = \|\mathbf{h}_{ij}(p)\| \cdot \|\mathbf{I}_j(p)\|_o = \|\mathbf{h}_{ij}(p)\| \cdot \|\mathbf{S}_{jk}^I(p)\| \cdot \|\mathbf{I}_k(p)\|_n = \|\mathbf{h}_{ij}(p)\| \cdot \|\mathbf{S}_{jk}^I(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{rk}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \|\mathbf{a}_r(p)\|$$

Откуда получаем

$$\|\mathbf{S}_{ij}(p)\| = \|\mathbf{h}_{ik}(p)\| \cdot \|\mathbf{S}_{kr}^I(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{jr}(p)\|^* \right]^{-1}; \quad (2.2)$$

$$\|\mathbf{S}_{ij}(p)\| = \|\mathbf{h}_{ik}(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{jk}(p)\|^* \right]^{-1} - 2 \cdot \|\mathbf{h}_{ik}(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{Z}_{rk}(p)\| + \|\mathbf{z}_{rk}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{rj}(p)\| \right];$$

$$\|\mathbf{S}_{ij}(p)\| = \|\mathbf{h}_{ik}(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{Z}_{rk}(p)\| + \|\mathbf{z}_{rk}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \left[ \|\mathbf{Z}_{rj}(p)\| - \|\mathbf{z}_{rj}(p)\|^* \right] \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{jr}(p)\|^* \right]^{-1};$$

Расписывая в явном виде (2.2) и следующие из него соотношения, можно непосредственно установить, что матрица является симметричной для взаимных цепей, что отражает свойство взаимности самого четырехполюсника.

Векторы напряжений и токов на зажимах и матрицу сопротивлений можно выразить через векторы нормированной волны и нормированную матрицу рассеяния:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_i(p)\| &= \|\mathbf{U}_i(p)\|_n + \|\mathbf{U}_i(p)\|_o = \\ &= \|\mathbf{z}_{ki}(p)\|^* \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{kr}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \|\mathbf{a}_r(p)\| + \|\mathbf{z}_{ik}(p)\| \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{rk}(p)\| \right]^{-1} \cdot \|\mathbf{b}_r(p)\| \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\|\mathbf{I}_i(p)\| = \|\mathbf{I}_i(p)\|_n - \|\mathbf{I}_i(p)\| = \left[ \|\mathbf{h}_{ir}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \|\mathbf{a}_r(p)\| - \left[ \|\mathbf{h}_{ir}(p)\| \right]^{-1} \cdot \|\mathbf{b}_r(p)\|; \quad (2.4)$$

Обратные соотношения, выражающие нормированные волны через векторы напряжения и тока на зажимах  $\|\mathbf{U}_i(p)\|$  и  $\|\mathbf{I}_i(p)\|$  и матрицы сопротивлений  $\|\mathbf{Z}_{ij}(p)\|$  и  $\|\mathbf{z}_{ij}(p)\|$  могут быть получены из (2.3) и (2.4) и имеют вид

$$\|\mathbf{a}_i(p)\| = 0.5 \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{ri}(p)\| \right]^{-1} \cdot \left[ \|\mathbf{U}_r(p)\| + \|\mathbf{z}_{rk}(p)\| \cdot \|\mathbf{I}_k(p)\| \right]; \quad (2.5)$$

$$\|\mathbf{b}_i(p)\| = 0.5 \cdot \left[ \|\mathbf{h}_{ir}(p)\|^* \right]^{-1} \cdot \left[ \|\mathbf{U}_r(p)\| - \|\mathbf{z}_{kr}(p)\|^* \cdot \|\mathbf{I}_k(p)\| \right]. \quad (2.6)$$

## § V. Физическая интерпретация нормированных параметров рассеяния

Нормированные параметры матрицы рассеяния можно просто интерпретировать как коэффициенты отражения или передачи на определенных зажимах, когда другие зажимы нагружены на их базисные сопротивления.

Используя обозначения, принятые в начале § IV, m-е уравнение из (IV.2.5), (IV.2.6) может быть записано в явном виде

$$a_m(p) = 0.5 \cdot (h_m(p))^{-1} \cdot [U_m(p) + z_m(p) \cdot I_m(p)]; \quad (V.1)$$

$$b_m(p) = 0.5 \cdot (h_m^*(p))^{-1} \cdot [U_m(p) - z_m^*(p) \cdot I_m(p)]. \quad (V.2)$$

Эти два уравнения позволяют определить условия, при которых отсутствует отраженная волна на зажимах с номером 1, т.е. волна, идущая обратно к генератору. Для устранения  $b_1(p)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$U_1(p) - I_1(p) = z_1^*(p).$$

Согласно рис. IV.1.2, это эквивалентно утверждению, что если пара зажимов с номером 1 нагружена сопротивлением  $z_i^*(p)$ , то будет отсутствовать отраженная волна  $b_i(p)$  на 1-й паре зажимов.

Таким образом, если генератор с чисто активным сопротивлением  $z_1(p) \equiv r$ ,  $r \in \mathfrak{R}$  нагружен на такое же сопротивление, то вся мощность уходит в нагрузку.

Следовательно, согласующая цепь СЦ вместе с реактивным четырехполюсником ПП должны трансформировать входное сопротивление четырехполюсника ПП, работающего на активную нагрузку, в сопротивление, равное или мало отличающееся (понятие малости вытекает из требований оптимального согласования) от активного сопротивления генератора в возможно более широкой частотной полосе.

Из (IV.2.2) получим

$$S_{ij}(p) = h_i(p) \cdot \left( h_j^*(p) \right)^{-1} \cdot S_{ij}^I(p).$$

Используя (IV.2.1) определяющее нормированную матрицу рассеяния, немедленно получим

$$S_{jj}(p) = \frac{b_j(p)}{a_j(p)} \Big|_{a_x(p)=0, x \neq j}, \quad (V.1)$$

$$S_{mj}(p) = \frac{b_m(p)}{a_j(p)} \Big|_{a_x(p)=0, x \neq j, m \neq j}. \quad (V.2)$$

Подстановка (IV.2.5), (IV.2.6) в (V.1) дает

$$S_{jj}(p) = \frac{h_j(p) \cdot \left[ U_j(p) - z_j^*(p) \cdot I_j(p) \right]}{h_j^*(p) \cdot \left[ U_j(p) + z_j(p) \cdot I_j(p) \right]} \Big|_{a_x(p)=0, x \neq j} = \frac{h_j(p) \cdot \left[ Z_{jj}(p) - z_j^*(p) \right]}{h_j^*(p) \cdot \left[ Z_{jj}(p) + z_j(p) \right]}, \quad (V.3)$$

где  $Z_{jj}(p)$  – входное сопротивление  $j$ -й пары зажимов когда все остальные нагружены на их базисные сопротивления как показано на рис. 1.2; пара зажимов нагружена генератором, включенным последовательно с сопротивлением.

Подобным же образом исследуем физический смысл величины  $S_{mj}(p)$ ,  $m \neq j$ . Подстановка (IV.2.5), (IV.2.6) в (V.2) дает

$$S_{mj}(p) = \frac{h_j(p) \cdot \left[ U_m(p) - z_m^*(p) \cdot I_m(p) \right]}{h_m^*(p) \cdot \left[ U_j(p) + z_j(p) \cdot I_j(p) \right]} \Big|_{a_x(p)=0, x \neq j}.$$

Далее покажем, что на оси действительных частот квадрат модуля  $S_{mj}(i\omega)$  представляет собой коэффициент преобразования мощности при передаче от  $j$ -й к  $m$ -й паре зажимов при нагрузке всех других пар зажимов на их базисные сопротивления, как показано на рис. V.1.

Вспоминая определение матрицы базисных сопротивлений (1.2), определение эрмитовой части матрицы и особенности разложения матрицы  $\|r_{ji}(p)\|$ , получим, что

$$|h_i(p)|^2 = h_i(p) \cdot h_i^*(p) = r_i(p) = \text{Re}[z_i(p)].$$

Для  $m$ -й пары зажимов, нагруженной лишь на свое базисное сопротивление (рис. V.1)

$$U_m(p) = z_m(p) \cdot I_m(p),$$

для  $j$ -й пары зажимов, нагруженной на свое базисное сопротивление последовательно с генератором ЭДС

$$U_j(p) + z_j(p) \cdot I_j(p) = U_{\Gamma_j}(p)$$

Рассмотрим квадрат модуля  $S_{mj}(p)$ , который можно записать в виде

$$\begin{aligned} |S_{mj}(iw)|^2 &= \frac{|h_j(p)|^2 \cdot |U_m(p) - z_m^*(p) \cdot I_m(p)|^2}{|h_m^*(p)|^2 \cdot |U_j(p) + z_j(p) \cdot I_j(p)|^2} \Bigg|_{a_x(p)=0, x \neq j} = \\ &= \frac{(\operatorname{Re}[z_j(w)]) \cdot |I_m(iw)|^2 \cdot 4 \cdot (\operatorname{Re}[z_m(w)])^2}{(\operatorname{Re}[z_m(w)]) \cdot |U_{\Gamma_j}(iw)|^2} \Bigg|_{a_x(iw)=0, x \neq j} \\ &= \frac{4 \cdot |I_m(iw)|^2 \cdot (\operatorname{Re}[z_j(w)]) \cdot (\operatorname{Re}[z_m(w)])}{|U_{\Gamma_j}(iw)|^2} \Bigg|_{a_x(iw)=0, x \neq j} = G_{jm}(w^2) \end{aligned}$$

Легко видеть, что это – коэффициент преобразования мощности при передаче от  $j$ -й к  $m$ -й паре зажимов четырехполюсника, когда  $j$ -я пара зажимов нагружена на генератор ЭДС, включенный последовательно с базисным сопротивлением  $z_j(p)$ , в то время как  $m$ -я пара зажимов также нагружена на ее базисное сопротивление  $z_m(p)$ . Такая ситуация, когда  $m = 2, j = 1$ , показана на рис. V.1.

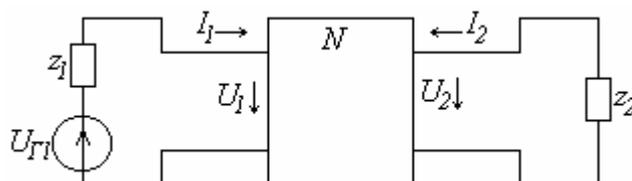


Рис. V.1. Физическая интерпретация параметра  $S_{21}(p)$  четырехполюсной цепи N.

Как следует из вышеперечисленной интерпретации, диагональный элемент  $S_{jj}(p)$  матрицы  $\|S_{ij}(p)\|$  называется нормированным коэффициентом отражения на  $j$ -й паре зажимов к  $m$ -й паре зажимов, так как на оси действительных частот квадрат модуля этой величины обозначает долю максимально возможной средней мощности на  $j$ -й паре зажимов, которая передается к нагрузке на выходной  $m$ -й паре зажимов.

Далее покажем, что матрица  $\|S_{ij}(p)\|$  унитарна на оси действительных частот, т.е.

$$\|S_{ij}(p)\| \cdot \|S_{ij}(p)\|^* = \|E_{ij}\|.$$

Используя (IV.2.3) и (IV.2.4), можно записать выражение

$$0.5 \cdot \left[ \|U_i(p)\|^* \cdot \|I_i(p)\| + \|U_i(p)\| \cdot \|I_i(p)\|^* \right] = \|a_i(p)\|^* \cdot \|a_i(p)\| - \|b_i(p)\| \cdot \|b_i(p)\|^*.$$

На оси действительных частот выражение для средней мощности, поглощенной четырехполюсником, получается в виде

$$\begin{aligned}
P_{cp} &= 0.5 \cdot \operatorname{Re} \left[ \|U_i(i\omega)\|^* \cdot \|I_i(i\omega)\| \right] = 0.25 \cdot \left[ \|U_i(i\omega)\|^* \cdot \|I_i(i\omega)\| + \|U_i(i\omega)\| \cdot \|I_i(i\omega)\|^* \right] = \\
&= 0.5 \cdot \left[ \|a_i(i\omega)\|^* \cdot \|a_i(i\omega)\| - \|b_i(i\omega)\| \cdot \|b_i(i\omega)\|^* \right] = \\
&= 0.5 \cdot \|a_i(i\omega)\|^* \cdot \left[ \|E_{ij}\|^* - \|S_{ik}(i\omega)\| \cdot \|S_{kj}(i\omega)\|^* \right] \cdot \|a_j(i\omega)\|.
\end{aligned}$$

Для пассивного четырехполюсника максимально возможная мощность неотрицательна для всех  $\|a_i(i\omega)\|$  (что следует из определения пассивности цепи), это показывает, что определяемая соотношением

$$\|Q_{ij}(i\omega)\| = \left[ \|E_{ij}\| - \|S_{ik}(i\omega)\| \cdot \|S_{kj}(i\omega)\|^* \right]$$

эрмитова матрица является положительно определенной. Если, кроме того, четырехполюсник не имеет потерь, то  $P_{cp} \equiv 0$ , откуда получаем

$$\|S_{ik}(i\omega)\| \cdot \|S_{kj}(i\omega)\|^* = \|E_{ij}\|. \quad (\text{V.4})$$

Таким образом, матрица  $\|S_{ij}(i\omega)\|$  унитарна. Матрица унитарна тогда и только тогда, когда векторы, ее составляющие, взаимно ортогональны. Кроме того унитарность матрицы накладывает требование на ее определитель, а именно: он всегда равен единице.

Эти свойства матрицы рассеяния для пассивного четырехполюсника дают соотношения и ограничения, крайне важные для построения согласующей цепи:

$$|S_{11}(i\omega)|^2 + |S_{12}(i\omega)|^2 = 1; \quad |S_{21}(i\omega)|^2 + |S_{22}(i\omega)|^2 = 1; \quad (\text{V.5})$$

$$|S_{11}(i\omega)|^2 + |S_{21}(i\omega)|^2 = 1; \quad |S_{12}(i\omega)|^2 + |S_{22}(i\omega)|^2 = 1; \quad (\text{V.6})$$

$$|S_{ij}(i\omega)|^2 \leq 1 \quad (\text{V.7})$$

$$|S_{12}(i\omega)|^2 = |S_{21}(i\omega)|^2; \quad (\text{V.8})$$

Если же четырехполюсник имеет потери, то (V.3) уже не имеет места. Поэтому-то и вводится ограничение на вид четырехполюсника, а именно: четырехполюсник не должен содержать активные потери. Кроме того, только в случае отсутствия внутренних потерь достигается максимум коэффициента отражения на оси действительных частот.

Неравенство (V.7), а также (V.5), (V.6) позволяют трактовать  $|S_{11}(i\omega)|^2$  как долю мощности, отраженной четырехполюсником и, следовательно, возвращенной генератору, а  $|S_{21}(i\omega)|^2$  как долю мощности, прошедшей в нагрузку. Соотношение показывает, что коэффициент передачи один и тот же в обоих направлениях.

В этой интерпретации становится понятным с физической точки зрения равенство правой части (V.5) и (V.6) единице: мощность, отданная генератором никуда не исчезает бесследно и не привносится извне (для пассивных систем), или, вспоминая известный философский принцип – "ex nihilo nihil fit".

Все выведенные ранее соотношения содержат элементы матрицы Z-параметров четырехполюсника  $N$ . Не лишним будет напомнить, что он составлен из четырехполюсника ПП, Z-параметры которого известны и четырехполюсника СЦ, который требуется синтезировать. Этот факт, по-видимому, накладывает ограничения на возможность синтеза согласующего четырехполюсника СЦ. Более того, в самом общем случае Z-параметры

четырёхполюсника СЦ. Более того, в самом общем случае  $Z$ -параметры четырёхполюсника ПП могут вообще явиться препятствием к синтезу согласующей цепи. Следовательно целью дальнейшего нашего исследования должно стать выяснение требований к  $Z$ -параметрам четырёхполюсника ПП для оптимального согласования в наиболее широкой частотной полосе.

### § VI. Влияние $Z$ -параметров пьезопреобразователя

Так как пьезопреобразователь представляется в виде активного сопротивления и реактивного четырёхполюсника (см. § I), а подключен он к активной же нагрузке, то в дальнейшем будем считать, что  $z_1(p) \equiv R_c$ ,  $z_2(p) \equiv R_n$ . Полагая в (V.3)  $j=1$ , входной импеданс четырёхполюсника, нагруженного на сопротивление  $R_n$ , будет равен

$$Z_{11}(p) = R_c \frac{1 + S_{11}(p)}{1 - S_{11}(p)} \quad (\text{VI.1})$$

Зная коэффициент передачи по мощности  $G_{12}(w^2)$ , из (V.6) найдем  $S_{11}(p)$ , учитывая, что на оси действительных частот.

$$|S_{11}(iw)|^2 = S_{11}(iw) \cdot S_{11}(-iw).$$

От функции  $S_{11}(p)$  потребуем чтобы все полюса и нули ее лежали в открытой левой полуплоскости.

Входное сопротивление четырёхполюсника ПП, нагруженного на активное сопротивление, является, фактически двухполюсником, поэтому ограничения на  $Z$ -параметры четырёхполюсника следуют из условий физической реализации означенного выше входного сопротивления.

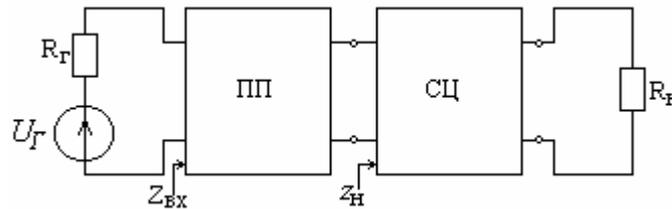


Рис. VI.1. К определению входного сопротивления  $Z_{вх}$  и  $Z_{н}$

Для физической реализации пассивного двухполюсника нули и полюса соответствующей функции должны располагаться в закрытой левой полуплоскости. Кроме того, порядки полиномов числителя и знаменателя могут различаться не более чем на единицу.

Данный двухполюсник можно представить в виде трех каскадно соединенных четырёхполюсников: ПП, СЦ и нагрузки  $z_n$  (рис. VI.1). Эти четырёхполюсники состоят из реальных элементов, а поэтому входное сопротивление нагруженного составного четырёхполюсника отвечает всем выше перечисленным требованиям.

Входное сопротивление четырёхполюсника связано с коэффициентом отражения соотношениями (VI.1) и (V.6), и изначально аппроксимируемой функцией является именно коэффициент отражения. Поэтому может случиться так, что входное сопротивление, выражающееся из (VI.1) будет иметь порядки полиномов числителя и знаменателя не больше, чем порядки полиномов входного сопротивления четырёхполюсника ПП, нагруженного на сопротивление  $z_n$ . В этом случае ни при каких условиях не может быть физически реализован четырёхполюсник СЦ, так как увеличение порядка составной цепи приводит к увеличению порядков соответствующих полиномов. Это принципиальное препятствие к синтезу согласующей цепи может быть легко устранено выбором порядка полиномов, составляющих коэффициент отражения.

Для произвольных цепей определить аналитическим путем частоту среза оказывается весьма сложно. Однако, учитывая, что частота среза, так или иначе, определяются коэффици-

ентами соответствующих полиномов, выбор которых до известной степени произволен, можно дать положительный ответ на вопрос о расширении полосы пропускания. На этом, вообще говоря, можно было бы поставить точку, если бы не одно "но". Как уже было замечено (§ IV), Z-параметры составного четырехполюсника являются нелинейными функциям Z-параметров четырехполюсников СЦ и ПП, и соответственно связаны с входным импедансом составного четырехполюсника, нагруженного на активное сопротивление  $z_H$ , причем весьма сложным образом.

Рассмотрим составной четырехполюсник как показано на рис. VI.1. В этом случае четырехполюсник СЦ, нагруженный на активное сопротивление  $R_H$ , можно рассматривать как двухполюсник с эквивалентным импедансом  $z_H$ . Выражая  $z_H$  из (III.3), получим

$$z_H = \frac{\Delta z - z_{22}}{Z_{ex} - z_{11}}, \quad (VI.2)$$

где  $z_{ij}$  – Z-параметры холостого входа четырехполюсника ПП,

$$\Delta z = |z_{ij}|$$

$Z_{ex}$  – дается выражением (VI.1).

Если (VI.2) в обозначить

$$\Psi(p) = R_1 \cdot [1 + S_{11}(p)];$$

$$\Phi(p) = 1 - S_{11}(p),$$

то входное сопротивление согласующей цепи (VI.2) можно записать в такой форме:

$$z_H = \frac{\Phi \cdot [\Delta z - z_{22}]}{\Psi - z_{11} \cdot \Phi}.$$

Доказать строго реализуемость (VI.2) в общем случае сложно (если вообще возможно), но тем не менее, учитывая, что множество рациональных функций  $G_{12}(w^2)$ , а соответственно и  $S_{11}(p)$  имеет по меньшей мере мощность континуума, то нет причин ожидать невозможности выбора функции, реализующей оптимальный коэффициент передачи мощности в *желаемой* частотной полосе.

Для случая простейшей RC-цепи вопрос о коэффициенте расширения полосы пропускания при использовании в качестве функции аппроксимации полиномов Чебышева решен аналитически (см. § VIII).

Вопросы выбора топологии четырехполюсника СЦ, предельная величина коэффициента расширения полосы, собственно технология синтеза четырехполюсника СЦ, для произвольных четырехполюсников ПП и произвольных же функциях аппроксимации остаются открытыми.

## § VII. Основные этапы и проблемы решения задачи широкополосного согласования

Прежде чем привести пример использования теории матриц рассеяния к частной задаче широкополосного согласования, в тезисной форме отметим шаги, которые следует сделать для практического решения задачи широкополосного согласования пьезопреобразователя и активной нагрузки и проблемы, при этом возникающие.

1. Пьезопреобразователь является черным ящиком в смысле топологии и значений элементов эквивалентной схемы. Для составления эквивалентной схемы требуется знать электрофизические параметры.

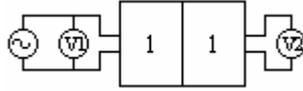


Рис. VII.2. Схема установки для измерения коэффициента передачи по напряжению пьезопреобразователя

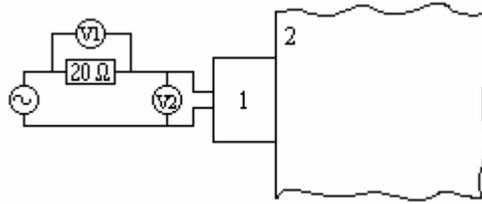


Рис. VII.1. Схема установки для измерения выходного импеданса пьезопреобразователя

Это –  $Z$ -параметры четырехполюсника, представляющего пьезопреобразователь. Эти параметры определяются из опытов холостого хода. Однако следует иметь в виду, что нельзя обеспечить холостой ход на выходе и на входе, а измерить напряжение на входе также не представляется возможным, так как со стороны входа, т.е. пьезопластины, действует неэлектрический фактор. Поэтому реально приходится измерять выходное сопротивление нагруженного пьезопреобразователя (рис. VII.1) (входом считается сторона, на которой расположена пьезопластина) и коэффициент передачи по напряжению системы, составленной из двух пьезопреобразователей (рис. VII.2). Под нагрузкой понимается металлический образец – объект контроля. На рис. VII.1 и рис. VII.2 обозначено: 1 – пьезопреобразователь, 2 – стальной образец, V1 и V2 – каналы осциллографа.

Т.е. результат эксперимента зависит от условий эксперимента. То же самое можно сказать об измерении коэффициента передачи. На этом этапе, а так же на следующем – этапе аппроксимации – предполагаются лишь диссипативные процессы энергии колебаний пьезопластины. Это первое серьезное допущение в задаче согласования.

2. После получения экспериментальных данных следует выбрать топологию эквивалентной схемы. Выбор топологии производится исключительно эмпирически. После того как топология выбрана, можно приступать к собственно аппроксимации. В результате этих манипуляций вычисляется вектор значений элементов, минимизирующий отклонение теоретических данных от экспериментальных. Отклонение экспериментальных данных показывает насколько хорошо теоретическая модель представляет реальный объект – пьезопреобразователь. Здесь возникает второе приближение.
3. Следующим этапом следует каким-то образом выбрать функцию коэффициента передачи мощности, которая бы отвечала требованиям (V.6), (V.7). Главное требование здесь, чтобы входной импеданс согласующей цепи (VI.2) был при этом физически реализуем. Если это требование не выполняется, то следует искать другую функцию.
4. Последним этапом является синтез согласующей цепи, входное сопротивление которой отвечало бы (VI.2). На этом этапе для достаточно произвольных функций входных импедансов и произвольных топологий не существует какого-либо алгоритма. Одна и та же функция входного импеданса может отвечать цепям различной топологии. Может случиться так, что синтезированная цепь будет лишь приближенно описывать функцию (VI.2).

Факты, перечисленные в тезисах 1 – 4 наводят на мысль, что согласованная таким образом система пьезопреобразователь – усилитель требует опытов, которые в конечном итоге покажут удачность выбранной теоретической модели пьезопреобразователя.

## § VIII. Частный случай согласования простейшей RC-цепи с активной нагрузкой фильтрами Чебышева

Для иллюстрации возможности использования теории матриц рассеяния рассмотрим возможность согласования RC-нагрузки с активным сопротивлением фильтром Чебышева. Приблизенно RC-цепью можно представить пьезопреобразователь в достаточной удаленности от резонансной частоты.

Под технически реализуемым фильтром будем понимать фильтр порядка не выше одиннадцатого. Выбор именно этого порядка во многом субъективен. Однако надо отдавать себе отчет в том, что реальные LC-элементы имеют активные потери, кроме того погрешности в номиналах элементов могут дать при техническом проектировании картину, отличную от расчетной.

Так как в данной RC-цепи содержится всего лишь два элемента: емкость и сопротивление, удобно нормировать эти элементы на частоту среза исходной цепи:

$$r = \frac{R}{R_{\text{норм}}},$$

$$c = \frac{C}{K_C}, \quad (\text{VIII.1})$$

где  $K_C = \frac{1}{\omega_{\text{норм}} R_{\text{норм}}}$ ;  $R_{\text{норм}}$ ,  $\omega_{\text{норм}}$  – нормирующие сопротивление и частота, выбираются из соображения удобства, в нашем же случае получим, что

$$c=2, r=1. \quad (\text{VIII.2})$$

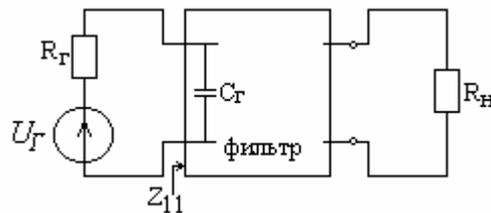


Рис. VIII.1. Согласование RC-генератора с активной нагрузкой. Емкость генератора относится к элементу синтезируемого фильтра

Нагрузочную емкость считаем элементом фильтра (рис. VIII.1). Таким образом, фильтр начинается с емкости  $C_1$ .

Собственно простота RC-цепи и разумность нормировок позволяют аналитически определить коэффициент расширения полосы.

Основная задача состоит в определении входного сопротивления  $Z_{11}$  согласующей цепи (вместе с емкостью генератора), нагруженной на сопротивление нагрузки по известному коэффициенту отражения.

Коэффициент передачи мощности чебышевского фильтра имеет вид:

$$|S_{21}(i\omega)|^2 = G(\omega^2) = \frac{K_n}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}, \quad (\text{VIII.3})$$

где  $K_n$  – коэффициент передачи мощности на нулевой частоте;

$T_n(\Omega)$  – полином Чебышева n-го порядка;

$\varepsilon$  – неравномерность АЧХ в полосе пропускания,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ;

Продолжая нормированную частоту  $\Omega$  на всю комплексную плоскость, введем нормированную комплексную частоту  $s$  таким образом, что

$$s = p / \omega_c,$$

что на оси действительных частот имеет вид

$$s = i\Omega \quad (\text{VIII.4})$$

Имея ввиду (VIII.4) и (V.6), зададим (VIII.3) выражением

$$S_{11}(iw)S_{11}(-iw) = \frac{(1 - K_n) \cdot \left[ 1 + \hat{\varepsilon}^2 \cdot T_n^2(-is) \right]}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(-is)}, \quad (\text{VIII.5})$$

где

$$\hat{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 \cdot (1 - K_n)^{-1}.$$

Если  $K_n = 1$ , то

$$S_{11}(iw)S_{11}(-iw) = \frac{\varepsilon^2 \cdot T_n^2(-is)}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(-is)}.$$

Нули и полюса функции (VIII.5) должны быть выбраны в левой полуплоскости, тогда минимально-фазовое разложение (VIII.5) получается в виде

$$S_{11}(s) = \pm \frac{\hat{\varphi}(s)}{\varphi(s)}. \quad (\text{VIII.6})$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(s) &= \sum_0^n \hat{b}_m \Omega^m \\ \varphi(s) &= \sum_0^n b_m \Omega^m \end{aligned}$$

Согласно (VI.1) входное сопротивление фильтра при нагрузке на  $r_n$  выходных зажимов определяется соотношением

$$Z_{11}(p) = r_z \frac{\varphi(s) \pm \hat{\varphi}(s)}{\varphi(s) \mp \hat{\varphi}(s)}. \quad (\text{VIII.7})$$

Величины  $K_n$ ,  $r_z$ ,  $r_n$  связаны и все три не могут быть выбраны произвольно:

$$\begin{aligned} \frac{r_n}{r_z} &= \left[ \frac{1 + (1 - K_n)^{1/2}}{1 - (1 - K_n)^{1/2}} \right]^{\pm 1} \text{ для нечетного } n; \\ \frac{r_n}{r_z} &= \left[ \frac{(1 + \varepsilon^2)^{1/2} + (1 + \varepsilon^2 - K_n)^{1/2}}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2} - (1 + \varepsilon^2 - K_n)^{1/2}} \right]^{\pm 1} \text{ для четного } n; \end{aligned}$$

знаки “плюс” или “минус” определяются соответственно для  $R_n \geq R_z$  и  $R_n < R_z$ . Так, если  $n$  нечетное, то максимальный коэффициент отражения на нулевой частоте равен единице:  $K_n = 1$ .

При выборе знака “плюс” в (VIII.6) разложение в лестничную дробь начнется с выделения индуктивности в продольной ветви фильтра, а при выборе знака “минус” – с выделения емкости в поперечной ветви, поэтому применительно к нашей задаче, в (VIII.6) следует выбрать знак “минус”.

Так как частота среза фильтра Чебышева равна единице, а синтез начинается именно с определения емкости генератора, отнесенной к элементу фильтра, то последующий переход к заданному номиналу емкости позволит денормировать частоту таким образом, что коэффициент расширения частотной полосы будет больше единицы. Покажем это.

При выборе знака “минус” в (VIII.6), согласно (VIII.7), получим

$$Z_{11} = R_2 \frac{\sum_0^n (b_m - \widehat{b}_m) \Omega^m}{\sum_0^n (b_m + \widehat{b}_m) \Omega^m}.$$

В этом случае разложение в лестничную дробь будем иметь вид

$$\frac{1}{Z_{11}} = c_1 s + \frac{1}{l_2 s + \frac{1}{c_3 s + \frac{1}{\ddots + 1/h}}}$$

и начинаться с коэффициента

$$c_1 = \frac{2}{b_{m-1} - \widehat{b}_{m-1}},$$

а это значение первой емкости  $c_2$ , поэтому

$$c_2 = \frac{2}{b_{m-1} - \widehat{b}_{m-1}}$$

Частота среза выражается через значение емкости, а значит, определяется значениями коэффициентов  $b_{m-1}$  и  $\widehat{b}_{m-1}$ .

Грин [2] получил значения для некоторых значений  $b_n$  и  $\widehat{b}_n$ , в частности коэффициенты  $b_{m-1}$  и  $\widehat{b}_{m-1}$  определяются выражениями

$$b_{m-1} = \frac{sh(a)}{\sin(\gamma_1)}, \quad \widehat{b}_{m-1} = \frac{sh(\widehat{a})}{\sin(\gamma_1)},$$

где  $a = n^{-1} \operatorname{arcsch}(1/\varepsilon)$ ,  $\widehat{a} = n^{-1} \operatorname{arcsch}(1/\widehat{\varepsilon})$ ,  $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon(1 - K_n)^{-1/2}$ ,  $\gamma_1 = \pi/2n$ .

Тогда

$$c_2 = \frac{2 \sin(\gamma_1)}{sh(a) - sh(\widehat{a})}.$$

Следует отметить, что, фактически, значения элементов, получающиеся из разложения в лестничную дробь, нормированы на новую частоту среза  $w_{cc} = kw_c$ ,  $k > 1$ .

$$C_2 = \frac{c}{w_c R_{\text{норм}}} = \frac{c_2}{k \cdot w_c R_{\text{норм}}} \Rightarrow k = \frac{c_2}{c} = \frac{\sin(\gamma_1)}{sh(a) - sh(\widehat{a})}. \quad \text{согласно (VIII.1),}$$

Задаваясь желаемым коэффициентом расширения полосы  $k$ , из последнего уравнения можно найти коэффициент пульсации  $\varepsilon$ , определяющий неравномерность в полосе пропускания. Теперь, после определения  $\varepsilon$  и  $K_n$  можно приступить к разложению в лестничную дробь, из которого определяются нормированные значения элементов согласующей цепи.

Предельная величина коэффициента расширения полосы пропускания получается в случае  $r_2 = r_n$ ,  $\varepsilon = 1$ . Производя необходимые вычисления, можно получить, что  $k \approx 1.77$ . Можно показать, что при  $n \rightarrow \infty$   $k \rightarrow 1.78$ . Поэтому нет надобности проектировать фильтр выше девятого порядка. Вообще, как оказывается порядок фильтра при равноволновой харак-

теристике слабо влияет на коэффициент расширения полосы. На рис. VIII.2 приводятся графики АЧХ для исходной несогласованной RC-цепи, фильтров третьего и пятого порядков. Везде  $r_2 = r_n$ ,  $\varepsilon = 1$ .

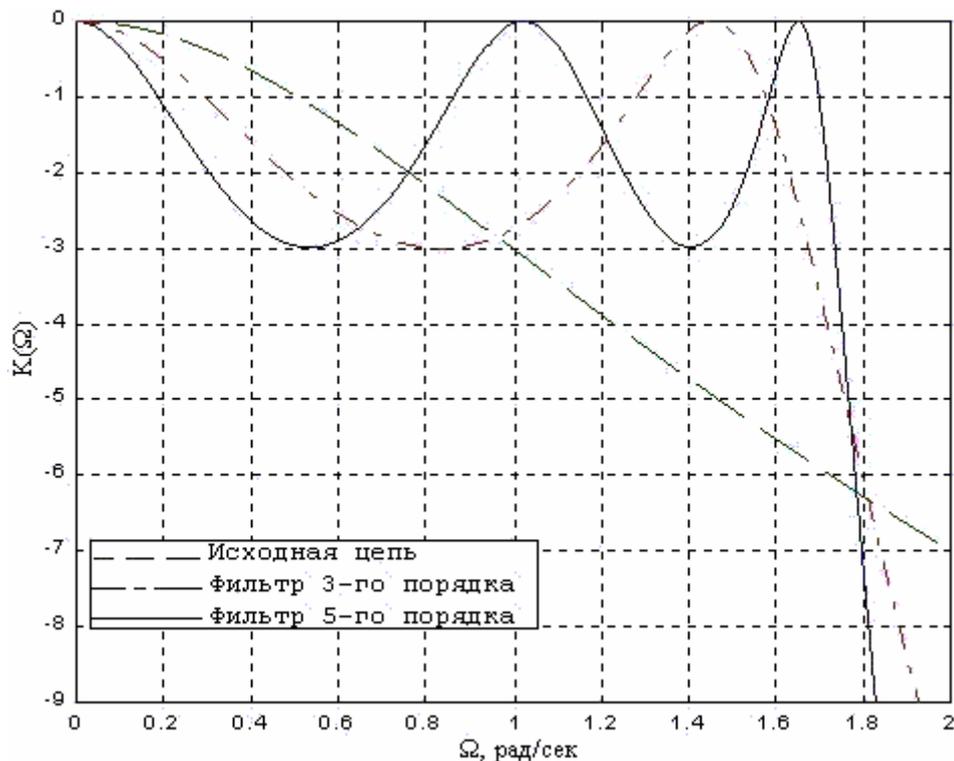


Рис. VIII.2. АЧХ для исходной несогласованной RC-цепи, фильтров третьего и пятого порядков. По оси ординат отложена нормированная частота  $\Omega$ , по оси абсцисс – модуль коэффициента передачи в дБ

Куда больший (в разы, во всяком случае) коэффициент расширения может быть получен при отказе от равноволновой характеристики. Однако в этом случае отдельные провалы АЧХ могут превышать 3 db. Кроме того, нет алгоритма подбора соответствующих коэффициентов используемых рациональных функций.

Резюмируя сказанное в предыдущих параграфах и, в особенности в § VII можно сделать следующие выводы:

- 1) возможно согласование пьезопреобразователя с активной нагрузкой со следующими ограничениями на Z-параметры преобразователя: они должны отвечать реактивному четырехполюснику, а единственное активное сопротивление выносится за его пределы и ассоциируется с внутренним сопротивлением источника;
- 2) возможно также при этих ограничениях расширение полосы пропускания преобразователя;
- 3) следует, однако, помнить, что говорить о расширении полосы пропускания разумно лишь до границ аппроксимации соответствующих функций преобразователя, вне этой области модель теряет всякий смысл;
- 4) для произвольных эквивалентных цепей преобразователя и функции коэффициента передачи мощности невозможно дать ответ о предельной величине коэффициента расширения полосы пропускания преобразователя, этот вопрос еще требует дополнительных исследований;
- 5) невозможно также дать однозначный алгоритм синтеза согласующей цепи, однако, если рациональная функция (VI.2) отвечает определенным требованиям, то возможно разложение (VI.2) в лестничную дробь, что эквивалентно лестничной реализации цепи;
- 6) результаты, полученные для согласования простейшей RC-цепочки (интегратора) чебышевским фильтром позволяют заключить, что предельный коэффициент расширения для технически реализуемой цепи (цепь не выше одиннадцатого порядка) равен 1.78;

- 7) следует помнить, что, по меньшей мере, дважды приходится делать приближения, а именно: на этапе аппроксимации соответствующих экспериментальных данных, полученных из опытов с пьезопреобразователем и при синтезе согласующего четырехполосника, в связи с чем возникает вопрос об устойчивости метода; иными словами, нет никакой гарантии, что приближения, принятые в процессе аппроксимации и синтеза не приведут к катастрофическим изменениям в теоретической модели; данный вопрос весьма сложен и мог бы составить содержание отдельного исследования, мы же оставляем его за рамками настоящей статьи и ограничиваемся констатацией того общеизвестного факта, что адекватность практически каждой теоретической модели проверяется на опыте.

### **Литература**

1. Вай Кайчэнь. Теория и проектирование широкополосных согласующих цепей: Пер. с англ./Под ред. Ю. Л. Хотунцева. – М.: Связь, 1979. – 288 с., ил.
2. Green E. Synthesis of ladder networks to give Butterworth or Chebyshev response in the pass band. – Proc. IEE. London, 1954, v. 101, pt. IV, p. 192 – 203.