

## **Решение динамических задач акустики методом конечных разностей во временной области. Основные соотношения. Анализ погрешностей.**

**Бархатов В.А.**

Рассматривается возможность применения конечно-разностного метода во временной области для расчета волновых процессов в твердом теле. Проводится проверка достоверности данного метода в акустических задачах. По результатам тестирования расчетных схем найдены оптимальные алгоритмы, определены условия, при которых результаты расчета обладают высокой точностью.

Направление научных исследований, основанное на численном моделировании сложных динамических задач, активно развивается с появлением высокопроизводительных ЭВМ. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных применяют метод конечных разностей во временной области (КРВО). В зарубежной литературе используется общепринятое обозначение FDTD (Finite Difference Time Domain). Метод КРВО был предложен около 30 лет тому назад, но широкое применение получил только в последнее десятилетие.

В настоящее время метод КРВО является одним из популярнейших методов численного решения задач электродинамики. Существует огромное количество публикаций, посвященных различным аспектам формирования электромагнитных полей и распространения радиоволн. Некоторые статьи, заинтересовавшие автора, указаны в списке литературы [1-5].

Внимание исследователей к акустическим задачам в основном сконцентрировано вокруг проблем ультразвуковой диагностики в медицине, например [6-12]. К сожалению, практически отсутствуют работы, ориентированные на решение задач ультразвуковой дефектоскопии.

Метод КРВО имеет ряд неоспоримых преимуществ:

- моделирование нестационарных волновых процессов в вязкоупругих, неоднородных анизотропных и нелинейных средах,
- возможность расчета волн в задачах со сколь угодно сложными граничными условиями,
- получение решений во времени (с некоторым дискретным шагом  $\Delta t$ ),
- относительно простой алгоритм вычислений, который легко реализуется на ЭВМ.

Есть и недостатки. Метод КРВО склонен к накоплению ошибок вычислений. За счет погрешностей округления чисел и приближениями, принятыми в расчетах, возникает шум решений, ложные волновые процессы.

В своей постановке метод КРВО основан на дискретизации дифференциальных уравнений в пространстве и во времени. Решения находят в узлах многомерной сетки. Одна из проблем применения метода КРВО заключается в необходимости использования мощных высокопроизводительных ЭВМ с объемом оперативной памяти в сотни и тысячи мегабайт. В связи с этим необходимо разработать алгоритмы, позволяющие вести расчеты на сетках с крупным шагом. Это позволит уменьшить объем требуемой оперативной памяти ЭВМ и одновременно сократит время вычислений.

Поэтому, прежде чем заниматься решением важных проблем ультразвуковой дефектоскопии, необходимо проверить достоверность метода КРВО в акустических задачах, найти оптимальные алгоритмы, определить условия, при которых результаты расчета обладают высокой точностью.

Формулировку схем расчета и анализ погрешностей алгоритмов будем проводить на решениях одномерного волнового уравнения в среде с внутренним трением

$$C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (1)$$

где:  $C$  – скорость звука,  $\eta$  - коэффициент трения.

Данное уравнение имеет простые решения  $U(x, t)$ , которые легко сравнивать с результатами расчетов.

Вначале найдем точное решение (1). Пусть в начале координат  $x = 0$  задан сигнал возбуждения  $U_0(t)$ . Рассмотрим волны, бегущие в положительном направлении координаты  $x$ . Если коэффициент трения положить равным нулю, решение будет тривиальным

$$U(x, t) = U_0 \left( t - \frac{x}{C} \right). \quad (2)$$

Попросту говоря, сигнал  $U_0(t)$ , распространяется вдоль оси  $x$  со скоростью  $C$ . Искажения отсутствуют.

Не нулевой коэффициент трения дает более сложное поведение волн. Пусть сигнал возбуждения содержит только одну спектральную составляющую

$$U_0 \cdot \exp[j\omega t], \quad \omega - \text{круговая частота.} \quad (3)$$

Рассмотрим волну, возбуждаемую сигналом (3) и бегущую в положительном направлении оси  $x$

$$U_0 \exp[j(\omega t - Kx)], \quad K - \text{волновое число.} \quad (4)$$

Подставляя решение (4) в уравнение (1) получим дисперсионное уравнение

$$C^2 K^2 = \omega^2 - j\omega\eta, \quad (5)$$

которое устанавливает связь между волновым числом и круговой частотой. Уравнение (5) имеет два корня для волнового числа. Затухающей волне (4) соответствует корень

$$K = \frac{\omega}{C} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2} + 1}{2}} + j \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2} - 1}{2}} \right\} \quad (6)$$

Перейдем к действительным функциям времени. Гармонический возбуждающий сигнал имеет вид

$$U_0(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t), \quad (7)$$

а решение для волны определяется выражением

$$U(x, t) = U_0 \exp[-\text{Im } K \cdot x] \cdot \cos[\omega t - \text{Re } K \cdot x] \quad (8)$$

Видно, что в среде с внутренним трением у волн появляется частотно-зависимый коэффициент затухания  $\text{Im} K$  и дисперсия скорости из-за нелинейной зависимости волнового числа  $\text{Re} K$  от частоты.

Итак, получены точные решения волнового уравнения (1) для импульсного режима возбуждения (3) и моночастотного режима (8).

Рассмотрим теперь конечно-разностные схемы во временной области. Здесь, непрерывное решение  $U(x,t)$  заменяется точечными оценками. Ось координат  $x$  и ось времени  $t$  разделим на равные промежутки с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Решение задачи будем находить только в фиксированных точках  $x = i \cdot \Delta x$  и  $t = k \cdot \Delta t$ , где  $i, k$  - целочисленные индексы. Образуется сетка решений в узлах с индексами  $i, k$ . Обозначим

$$U_i^k = U(i \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t) \quad (9)$$

Далее необходимо установить способы вычисления производных по координате и по времени. Рассмотрим одномерную цепочку узлов. Возьмем из нее какой либо узел  $U_i$  и установим в окрестности узла локальную систему координат, ноль координат совместим с узлом  $X = x - i \cdot \Delta x$ . Выполним разложение точного решения (функция  $U(x)$ ) в степенной ряд в точке  $X = 0$  (ряд Маклорена)

$$U(X) = U + U^{(1)}X + \frac{1}{2}U^{(2)}X^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}X^3 + \frac{1}{24}U^{(4)}X^4 + \frac{1}{120}U^{(5)}X^5 + \frac{1}{720}U^{(6)}X^6 + R_7(X). \quad (10)$$

В данном выражении верхний индекс в круглых скобках указывает производную по  $X$ . Остаток степенного ряда оценивается как [3]

$$R_n(X) \leq \frac{|X|^n}{n!} \quad (11)$$

Теперь получим формулы для приближенного расчета второй производной по  $x$  в узле с индексом  $i$ . Воспользовавшись разложением (10), запишем выражения для узлов  $i-1, i, i+1$

$$U_{i-1} = U(-\Delta x) = U_i - U^{(1)}\Delta x + \frac{1}{2}U^{(2)}\Delta x^2 - \frac{1}{6}U^{(3)}\Delta x^3 + R_4(\Delta x)$$

$$U_i = U(0) = U_i + U^{(1)}0 + \frac{1}{2}U^{(2)}0^2 + \dots = U_i \quad (12)$$

$$U_{i+1} = U(+\Delta x) = U_i + U^{(1)}\Delta x + \frac{1}{2}U^{(2)}\Delta x^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}\Delta x^3 + R_4(X)$$

Рассмотрим линейную комбинацию решений в узлах  $i-1, i, i+1$

$$U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} = U^{(2)}\Delta x^2 + 2R_4(\Delta x^4). \quad (13)$$

Откуда нетрудно получить приближенное выражение для расчета второй производной

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (14)$$

Ошибка вычислений (14) не превышает величины  $\Delta x^2/12$ . В дальнейшем будем оценивать только порядок погрешности  $O(\Delta x^2)$ .

Сделаем небольшой вывод. Видно, что в расчетах волнового уравнения на сетках решений изначально заложена ошибка вычисления производных. В процессе решения волнового уравнения ошибки могут накапливаться. За счет погрешностей вычислений формируются ложные сигналы, шум сетки.

Можно получить более точное значение производной, проводя расчеты для большего количества узлов. Общая формула для вычисления второй производной имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=L1}^{n=L2} G_n U_{i+n} . \quad (15)$$

Коэффициенты  $G_n$  для некоторых вариантов расположения узлов показаны в таблице 1.

Таблица 1

$G_n$	L2=1 L1=-1	L2=2 L1=-2	L2=1 L1=-3	L2=3 L1=-1	L2=3 L1=-3
$G_3$				-1/12	2/180
$G_2$		-1/12		4/12	-27/180
$G_1$	1	16/12	11/12	6/12	270/180
$G_0$	2	-30/12	-20/12	-20/12	-490/180
$G_{-1}$	-1	16/12	6/12	11/12	270/180
$G_{-2}$		-1/12	4/12		-27/180
$G_{-3}$			-1/12		2/180
Ошибка	$O(\Delta x^2)$	$O(\Delta x^4)$	$O(\Delta x^3)$	$O(\Delta x^3)$	$O(\Delta x^6)$

Дифференциальное уравнение (1) содержит еще первую производную по времени. Определим формулы для ее расчета по узлам сетки. Рассуждая аналогичным образом, запишем общее уравнение для первой производной

$$\frac{\partial U^k}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=L1}^{n=L2} P_n U^{k+n} . \quad (16)$$

Коэффициенты  $P_n$  для некоторых вариантов расположения узлов показаны в таблице 2.

Таблица 2

$P_n$	L2=1 L1=0	L2=0 L1=-1	L2=1 L1=-1	L2=1 L1=-3	L2=0 L1=-4	L2=4 L1=0
$P_4$						3/12
$P_3$						-16/12
$P_2$						36/12
$P_1$	1		1/2	-3/12		-48/12
$P_0$	-1	1	0	-10/12	-25/12	25/12
$P_{-1}$		-1	-1/2	18/12	48/12	
$P_{-2}$				-6/12	-36/12	
$P_{-3}$				1/12	16/12	
$P_{-4}$					-3/12	
Ошибка	$O(\Delta t)$	$O(\Delta t)$	$O(\Delta t^2)$	$O(\Delta t^3)$	$O(\Delta t^3)$	$O(\Delta t^3)$

Алгоритм моделирования волнового процесса в конечных разностях получим следующим образом. Выберем формулы для расчета производных и подставим их в волновое уравнение (1). Например, в самом простом случае, производные в узле  $U_i^k$  вычисляются с учетом соседних узлов, тогда

$$C^2 \cdot \left( \frac{U_{i+1}^k - 2 \cdot U_i^k + U_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) = \left( \frac{U_i^{k+1} - 2 \cdot U_i^k + U_i^{k-1}}{\Delta t^2} \right) + \eta \left( \frac{U_i^{k+1} - U_i^{k-1}}{\Delta t} \right). \quad (17)$$

Проанализируем эту формулу. Амплитуда колебаний в  $i$ -том узле формируется за счет колебаний соседних узлов  $i+1$ ,  $i-1$  в настоящий момент времени  $k$ . Также учитывается состояние узла  $i$  в прошедший момент времени  $k-1$ , в настоящий  $k$  и в будущий момент времени  $k+1$ . Уравнение (17) позволяет вычислить амплитуду колебаний узла  $i$  в будущий момент времени  $k+1$ . Преобразуем уравнение (17) так, чтобы величина  $U_i^{k+1}$  была выражена в явном виде

$$U_i^{k+1} = \left[ C^2 \Delta t \cdot U_{xx} + \frac{1}{\Delta t} \cdot U_{tt} + \eta \cdot U_t \right] \cdot E, \quad (18)$$

где:

$U_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} (U_{i+1}^k - 2 \cdot U_i^k + U_{i-1}^k)$  - вторая производная по координате,

$U_{tt} = 2 \cdot U_i^k - U_i^{k-1} - U_i^{k+1}$  - остаток второй производной по времени,

$U_t = U_i^{k-1} - U_i^{k+1}$  - остаток первой производной по времени.

$$E = \frac{\Delta t}{1 + \eta \Delta t}.$$

На основании известных амплитуд колебаний в настоящем  $k$  и в прошлом  $k-1$  производится расчет амплитуды в будущем  $k+1$ . Такие схемы расчета называют явными [13,14]. Фактически в них волновое уравнение решается в узле  $i$  для момента времени  $k$  и производится экстраполяция решения на момент времени  $k+1$ .

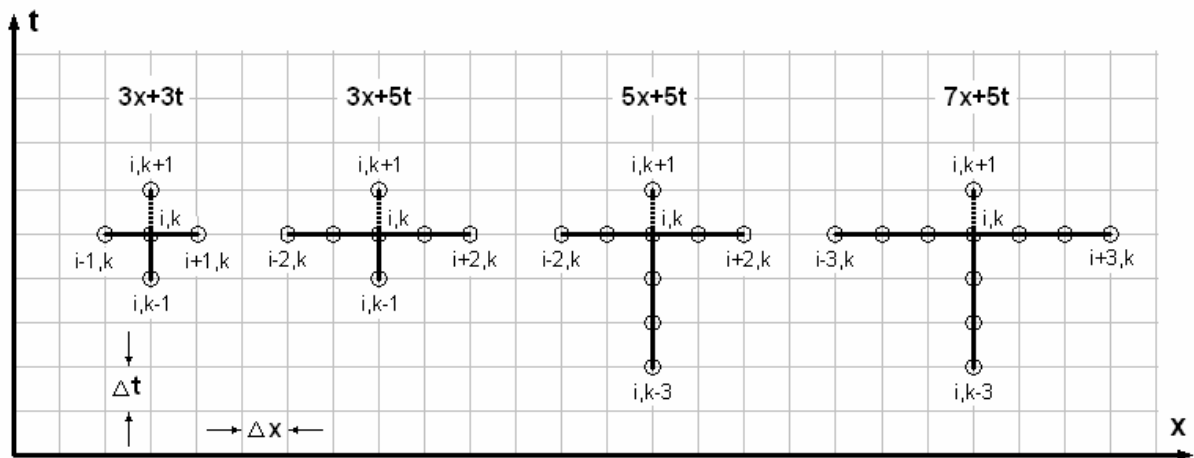


Рис.1 Графическое представление конечно-разностных алгоритмов.

В зависимости от способа вычисления производных конечно-разностная схема использует различное количество узлов. Графически, узлы, участвующие в вычислениях показаны на Рис.1. Здесь введено краткое обозначение алгоритма Nx+Mt, где N – количество узлов, использованных для вычисления производной по координате, M – количество узлов, использованных для вычисления производных по времени. В частности алгоритму 3x+3t соответствует расчет по формуле (18) с ниже следующими параметрами. Выражения для расчета  $U_i^{k+1}$  различными алгоритмами проводятся по формуле (18). Отличие между ними состоит в правилах вычисления параметров  $U_{xx}$ ,  $U_{tt}$ ,  $U_t$ ,  $E$ .

#### Алгоритм 5x+3t.

$$U_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{12} (-6U_{i+2}^k + 16U_{i+1}^k - 30 \cdot U_i^k + 16U_{i-1}^k - 6U_{i-2}^k) \quad - \quad \text{вторая производная по}$$

координате,

$$U_{tt} = 2 \cdot U_i^k - U_i^{k-1} \quad - \quad \text{остаток второй производной по времени,}$$

$$U_t = U_i^{k-1} \quad - \quad \text{остаток первой производной по времени.}$$

$$E = \frac{\Delta t}{1 + \eta \Delta t}.$$

#### Алгоритм 5x+5t.

$$U_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{12} (-6U_{i+2}^k + 16U_{i+1}^k - 30 \cdot U_i^k + 16U_{i-1}^k - 6U_{i-2}^k) \quad - \quad \text{вторая производная по}$$

координате,

$$U_{tt} = \frac{1}{12} (20 \cdot U_i^k - 6U_i^{k-1} - 4U_i^{k-2} - U_i^{k-3}) \quad - \quad \text{остаток второй производной по времени,}$$

$$U_t = \frac{1}{12} (-10 \cdot U_i^k + 18U_i^{k-1} - 6U_i^{k-2} + U_i^{k-3}) \quad - \quad \text{остаток первой производной по времени.}$$

$$E = \frac{12\Delta t}{11 + 3\eta\Delta t}.$$

#### Алгоритм 7x+5t.

$$U_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{180} (2U_{i+3}^k - 27U_{i+2}^k + 270U_{i+1}^k - 490 \cdot U_i^k + 270U_{i-1}^k - 27U_{i-2}^k + 2U_{i-3}^k) \quad - \quad \text{вторая}$$

производная по координате,

$$U_{tt} = \frac{1}{12} (20 \cdot U_i^k - 6U_i^{k-1} - 4U_i^{k-2} - U_i^{k-3}) \quad - \quad \text{остаток второй производной по времени,}$$

$$U_t = \frac{1}{12} (-10 \cdot U_i^k + 18U_i^{k-1} - 6U_i^{k-2} + U_i^{k-3}) \quad - \quad \text{остаток первой производной по времени.}$$

$$E = \frac{12\Delta t}{11 + 3\eta\Delta t}.$$

Следует ожидать, что увеличение количества узлов в расчетных соотношениях обеспечит лучшую точность вычислений.

Необходимо отметить, что все алгоритмы, построенные таким способом, являются условно устойчивыми. Вычислительный процесс сходится (устойчив), если выполняется соотношение между шагами сетки  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{C_{MAX}} \quad (19)$$

Здесь  $C_{MAX}$  - максимальная скорость из всех контактирующих сред. Устойчивость алгоритма еще не означает, что погрешности вычислений будут малы. Рекомендации к выбору  $\Delta x$  и  $\Delta t$  обсудим позднее, после тестирования алгоритмов.

Сейчас рассмотрим важный вопрос о вычислении колебаний на границе раздела двух сред. Как известно, граничные условия выражаются в виде баланса сил, действующих с двух сторон границы  $F_1 = F_2$ . Рационально разбиение пространства проводить так, чтобы узлы попадали на границу раздела. Тогда граничные условия можно преобразовать в алгоритм вычисления амплитуды колебаний узла.

Пусть, узел с индексом  $i$  расположен на границе двух сред Рис.2. Выразим силы, действующие на границе, через модули упругости и деформации (первые производные по координате)

$$E_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = E_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}. \quad (20)$$

Обозначения  $U_1$  и  $U_2$  показывают, что производные получают отдельно для среды 1 и среды 2 в точке контакта. Естественно, в (20) нужно подставить производные, найденные в конечных разностях. Погрешности необходимо свести к минимуму, поэтому используем оценку производных по 5-ти узлам сетки (см. (16) и столбцы табл.2 для вариантов расположения узлов  $L2=4 L1=0$  и  $L2=0 L1=4$ ). Получим

$$\begin{aligned} E_1 \frac{1}{12\Delta x} (-25U_i^{k+1} + 48U_{i-1}^{k+1} - 36U_{i-2}^{k+1} + 16U_{i-3}^{k+1} - 3U_{i-4}^{k+1}) = \\ = E_2 \frac{1}{12\Delta x} (25U_i^{k+1} - 48U_{i+1}^{k+1} + 36U_{i+2}^{k+1} - 16U_{i+3}^{k+1} + 3U_{i+4}^{k+1}) \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем (21) в более удобный вид

$$\begin{aligned} U_i^{k+1} = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \frac{1}{25} (48U_{i-1}^{k+1} - 36U_{i-2}^{k+1} + 16U_{i-3}^{k+1} - 3U_{i-4}^{k+1}) + \\ + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{25} (48U_{i+1}^{k+1} - 36U_{i+2}^{k+1} + 16U_{i+3}^{k+1} - 3U_{i+4}^{k+1}) \end{aligned} \quad (22)$$

Частный случай колебаний узла на свободной границе нетрудно получить из (22), полагая один из модулей упругости равным нулю.

Обратите внимание, что формулы (21,22) записаны для временного слоя  $k+1$ . Граничные условия должны выполняться во все моменты времени. Нужно согласовать вычисления внутренних узлов сетки (18) и узлов на границе (22). Поступают следующим образом. Сначала проводят расчеты для внутренних узлов сетки, получают значения амплитуд в слое  $k+1$ , а потом определяют амплитуды в узлах на границе, тоже в момент времени  $k+1$ . Такие расчеты выполняют циклически, получая каждый раз решения в новом временно слое.

В практической реализации расчетов возникает еще один вид границ – это граница сетки. Алгоритм производит циклические расчеты для внутренних узлов сетки. Если пограничные узлы оставлять без внимания, их амплитуда будет постоянной, что

соответствует абсолютно жесткой границе. Ясно, что волны, падающие на пограничный узел, будут отражаться в область расчета. Нужно создать условия для утилизации волн.

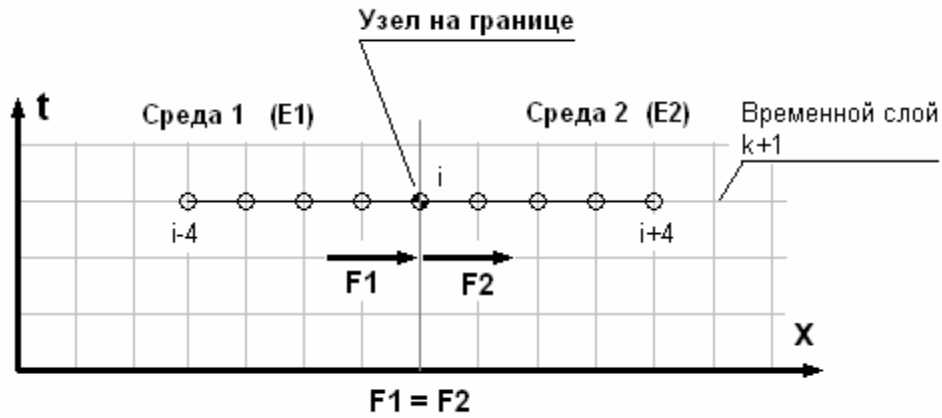


Рис.2. Реализация граничных условий в области контакта двух сред.

Пусть, сетка заканчивается в узле  $i_{MAX}$  (правая граница). Рассмотрим волны, набегающие на правую границу (2) и используем аппроксимацию сигнала посредством квадратичной функции

$$U(t, X) = U\left(t - \frac{X}{C}\right) = U_0 + V \cdot \left(t - \frac{X}{C}\right) + A \cdot \left(t - \frac{X}{C}\right)^2, \quad (23)$$

здесь:  $V$  - скорость нарастания сигнала,  $A$  - ускорение изменения сигнала. Сопоставим локальную систему координат с узлом  $i_{MAX} - 1, k$ . В данном узле  $X = 0, t = 0$ . Запишем выражения для амплитуд сигналов в узлах, прилегающих к границе сетки

$$\text{Узел } i_{MAX}, k+1. \quad U_{i_{MAX}}^{k+1} = U_0 + V \cdot \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{C}\right) + A \cdot \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{C}\right)^2$$

$$\text{Узел } i_{MAX} - 1, k+1. \quad U_{i_{MAX}-1}^{k+1} = U_0 + V \cdot (\Delta t) + A \cdot (\Delta t)^2$$

$$\text{Узел } i_{MAX} - 1, k. \quad U_{i_{MAX}-1}^k = U_0 \quad (\text{начало локальной системы координат})$$

$$\text{Узел } i_{MAX} - 1, k-1. \quad U_{i_{MAX}-1}^{k-1} = U_0 - V \cdot (\Delta t) + A \cdot (\Delta t)^2$$

Параметры аппроксимации  $V$  и  $A$  определяются по данным амплитуд внутренних узлов сетки

$$V = \frac{U_{i_{MAX}-1}^{k+1} - U_{i_{MAX}-1}^{k-1}}{\Delta t}, \quad A = \frac{U_{i_{MAX}-1}^{k+1} - 2U_{i_{MAX}-1}^k + U_{i_{MAX}-1}^{k-1}}{\Delta t^2}$$

Теперь получим выражение для расчета амплитуды в пограничном узле

$$U_{i_{MAX}}^{k+1} = U_0 + \frac{U_{i_{MAX}-1}^{k+1} - U_{i_{MAX}-1}^{k-1}}{\Delta t} \cdot \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{C}\right) + \frac{U_{i_{MAX}-1}^{k+1} - 2U_{i_{MAX}-1}^k + U_{i_{MAX}-1}^{k-1}}{\Delta t^2} \cdot \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{C}\right)^2 \quad (24)$$



Исходно предполагалось, что существуют только волны, падающие на границу. Отраженных волн нет. Следовательно, расчет колебаний в узлах на границе сетки (24) обеспечивает подавление отраженных волн и утилизацию падающих волн. Реально, некоторый коэффициент отражения все-таки есть. Это связано с погрешностью аппроксимации сигнала (23). В тестовых расчетах, обсуждаемых ниже, паразитные отражения от границы сетки не превышали 0,3% от амплитуды падающих волн.

Установим общий порядок проведения расчетов.

1. В памяти ЭВМ формируется сетка решений  $U_i^k$ . Выбирают размеры шагов  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Обычно нет необходимости хранить все временные слои сетки. Достаточно выделить несколько слоев. Например, для алгоритма  $3x+3t$  выделим 3 временных слоя  $U_i^{-1}, U_i^0, U_i^{+1}$ . В каждом цикле вычислений на основе данных  $U_i^{-1}, U_i^0$  будет определяться решение в следующий момент времени  $U_i^{+1}$ . Это решение копируется на экран в виде графика, затем производится перезагрузка слоев  $U_i^0 \rightarrow U_i^{-1}, U_i^{+1} \rightarrow U_i^0$  и выполняется следующий цикл вычислений. Для алгоритмов  $3x+5t$  и более сложных выделим 5 временных слоев.
2. Определяют правила вычислений амплитуды в каждом узле.
  - А) Если это внутренний узел, решение для него находят с помощью заданного алгоритма - вычисление по формуле (18). Естественно, используют параметры среды  $C$  и  $\eta$ , в которой находится узел.
  - В) Если узел находится на границе раздела двух сред, расчет проводят по формуле (22).
  - С) Для узлов на границе сетки расчет выполняют по формуле (24).
  - Д) В узле возбуждения колебаний его амплитуду устанавливают на основании известной временной зависимости.
3. Производится обнуление данных. В начальный момент времени  $U_i^{-1} = 0, U_i^0 = 0, U_i^{+1} = 0$ . Волны отсутствуют.
4. Проводят циклические расчеты конечно-разностным алгоритмом. Цикл вычислений содержит 4 этапа. Рассмотрим их на примере алгоритма  $3x+3t$ .
  1. В каждом внутреннем узле сетки по данным слоев  $U_i^{-1}, U_i^0$  определяются амплитуды в слое  $U_i^{+1}$ . Вычисление по формуле (18). Здесь пропускаем все граничные узлы и узлы возбуждения.
  2. Вычисляют амплитуды  $U_i^{+1}$  в граничных узлах. Записывают новое значение амплитуды в узлах возбуждения.
  3. На этом этапе получено решение во временном слое  $+1$ . Проводят анализ решения. Вывод графиков.
  4. Производят перезагрузку слоев  $U_i^0 \rightarrow U_i^{-1}, U_i^{+1} \rightarrow U_i^0$ .

Тестирование алгоритмов выполнялось с помощью программы, разработанной автором. Программа производит расчеты волн на сетке 120 000 узлов по координате  $x$ , сохраняя в памяти ЭВМ 5 временных слоев. Амплитуды колебаний представлены числами с плавающей запятой типа Real в 32-разрядной ЭВМ. Такие числа имеют 11 значащих цифр и показатель степени в диапазоне от +305 до -305. Данные сетки занимают 4,8 мегабайта в оперативной памяти ЭВМ.

Возбуждение волн осуществляется с крайнего узла сетки  $x = 0, i = 0$ . Программа моделирует волновой процесс в положительном направлении оси  $x$  с помощью четырех

алгоритмов, рассмотренных ранее. На противоположном конце сетки  $i = 119\,999$  проводится утилизация волн (см. формулу (24)).

Параметры среды  $C$ ,  $\eta$  и шаги сетки  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  устанавливаются пользователем. Программа обеспечивает выполнение расчетов, управление процессом расчета (старт, остановка, продолжение) и вывод результатов в виде графиков и численных значений амплитуд в узлах сетки.

Первая группа тестов предназначена для определения погрешности алгоритмов при расчете импульсного волнового процесса. В качестве возбуждающего сигнала использовался импульс, содержащий один период колебаний с частотой 5 МГц – Рис.3. Установлены параметры среды – скорость 5000 м/с, поглощение волн отсутствует. Средняя длина волны импульса 1мм. Были выбраны шаги сетки – по координате 25 мкм, по времени 2 нс. Расчеты выполнялись в течение 50 000 циклов, что соответствует длине пробега волн 500 мм.

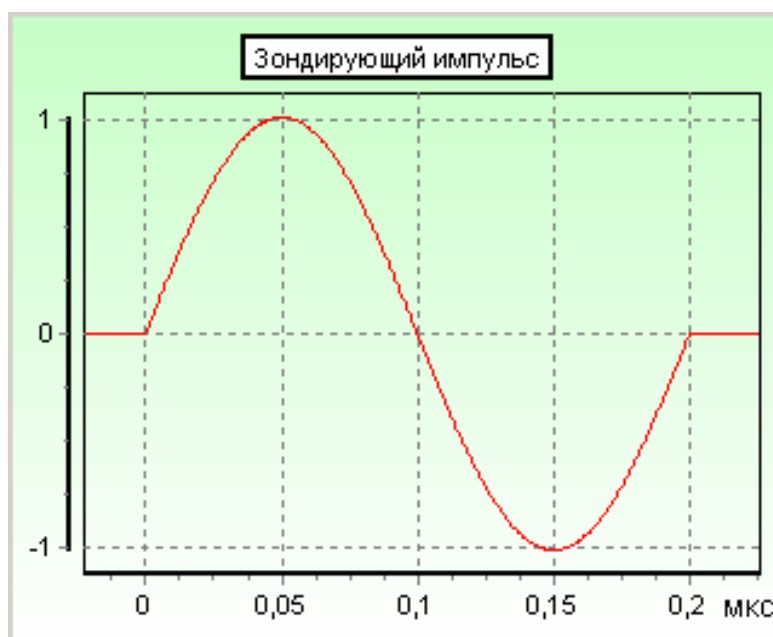


Рис.3 Импульс возбуждения сетки.

Результаты расчетов представлены на Рис. 4 – 6. Видно, что алгоритм  $3x+3t$  дает катастрофическую потерю точности. Алгоритм  $5x+3t$  вычисляет решение с грубыми ошибками. Это не значит, что данные алгоритмы не работоспособны. Просто для них задан слишком крупный шаг сетки.

Хорошие результаты обеспечивают алгоритмы  $5x+5t$  и  $7x+5t$ . Например, акустический импульс, найденный алгоритмом  $5x+5t$ , представлен на Рис.6А. Здесь, погрешность вычисления амплитуды составляет 2,5%. Следует обратить внимание на очень низкий шум сетки – Рис.6Б и Рис.6В. Паразитные сигналы имеют частоту примерно 20 МГц. Их амплитуда экспоненциально убывает при удалении от основного сигнала. На расстоянии 2-х длин волн амплитуда шума становится порядка  $10^{-9}$  от амплитуды бегущей волны. Алгоритм  $7x+5t$  обладает более высокой точностью. Погрешность решения 0,5%. Амплитуда шума примерно в 6 раз меньше по сравнению с алгоритмом  $5x+5t$ .

Вторая группа тестов предназначена для оценки погрешностей решения волнового уравнения с потерями энергии. Возбуждение сетки проводилось непрерывным синусоидальным сигналом с частотой 5МГц. Амплитуда возбуждающего сигнала равна единице. Скорость звука в среде 5000 м/с. Коэффициент трения установлен большим  $0,5 \text{ мкс}^{-1}$  для формирования высокого затухания волн. Шаг сетки в пространстве 15 мкм, по

времени - 1 нс. Выполнялось 80 000 циклов расчета для достижения стационарного режима бегущих волн.

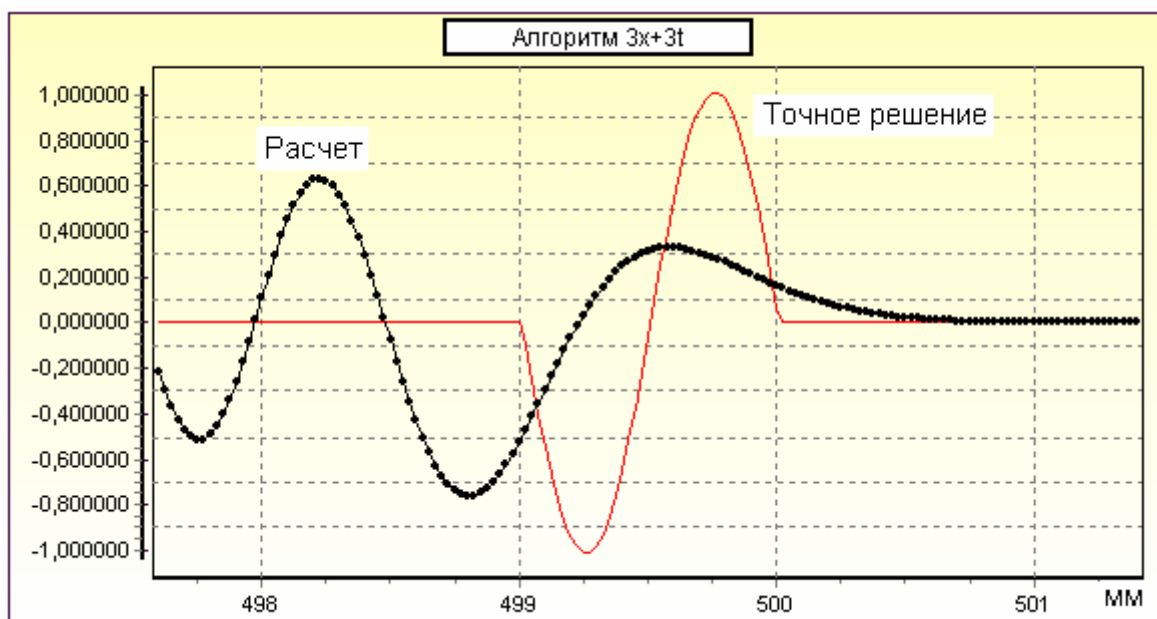


Рис.4. Расчет волн алгоритмом  $3x+3t$ .

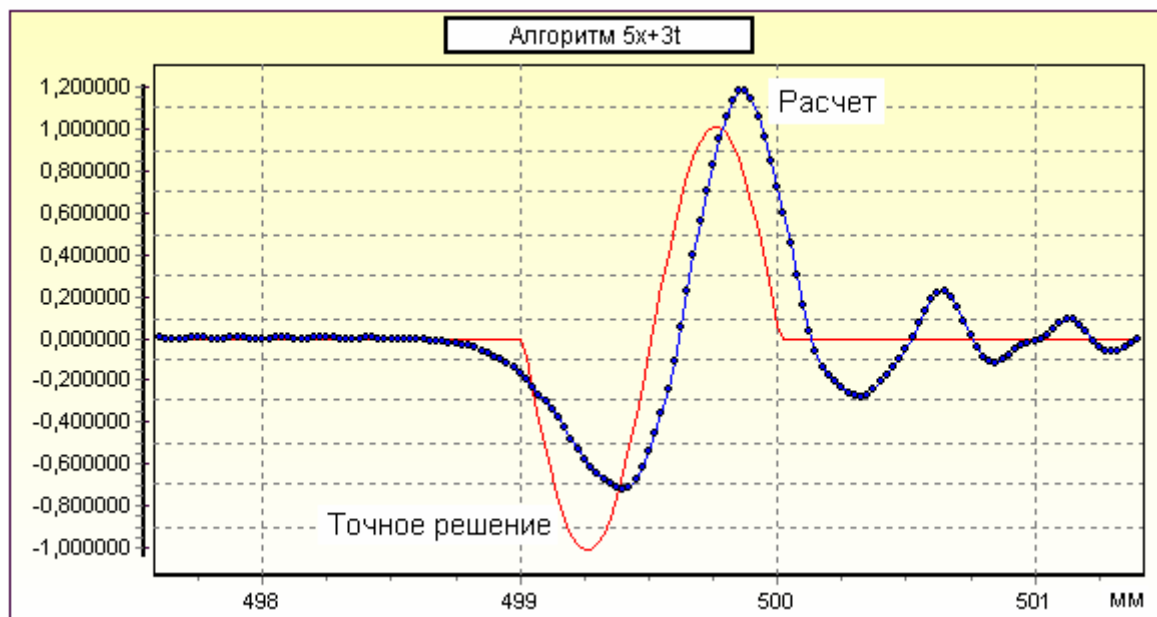


Рис.5. Расчет волн алгоритмом  $5x+3t$ .

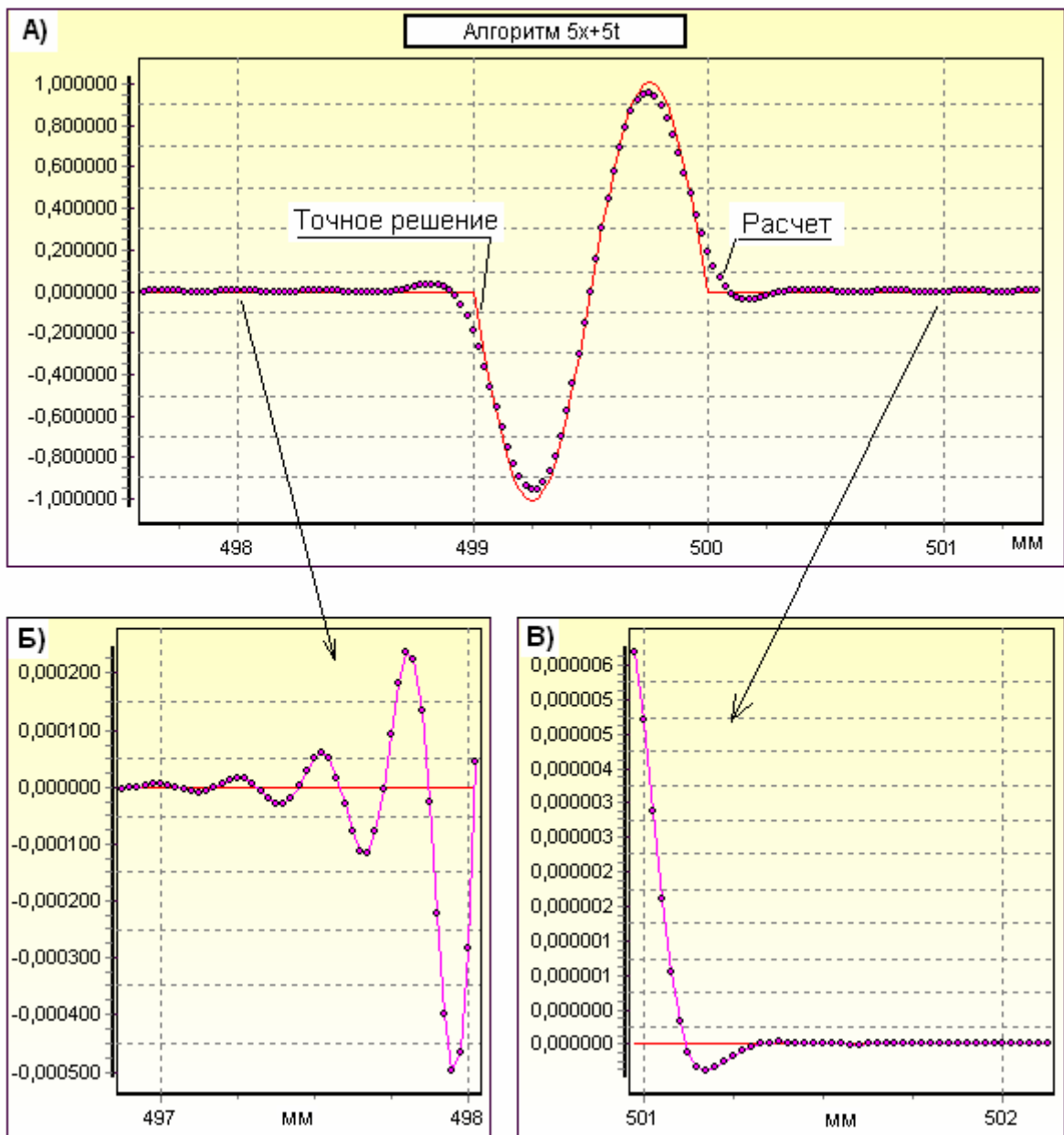


Рис.6. Расчет волн алгоритмом  $5x+5t$ .

А- Вид сигнала. Б,В – шум сетки.

Результаты расчетов показаны на Рис.7. Ослабление волн, исходящих от источника возбуждения, на расстоянии 170мм составляет приблизительно  $-75$  дБ. Видно, что алгоритм  $7x+5t$  обеспечивает гораздо более высокую точность. Погрешность амплитуды для него не превышает 2%. Заметим, что фазовая скорость волн в среде с поглощением оказывается несколько выше величины 5000 м/с. Алгоритм  $7x+5t$  прекрасно моделирует волновой процесс, учитывая ослабление сигнала и изменение фазовой скорости волн.

Последний тест относится к расчетам волн на границе раздела двух сред. Выбраны параметры контактирующих сред  $C1=5000$  м/с  $E1=120$  ГПА,  $C2=2500$  м/с,  $E2=100$  ГПА. Поглощение волн отсутствует. Акустические импедансы равны  $Z1=E1/C1=0,024$ ,  $Z2=E2/C2=0,04$ . Возбуждение производилось импульсом Рис.3. Граница раздела установлена на расстоянии 2мм от источника волн.

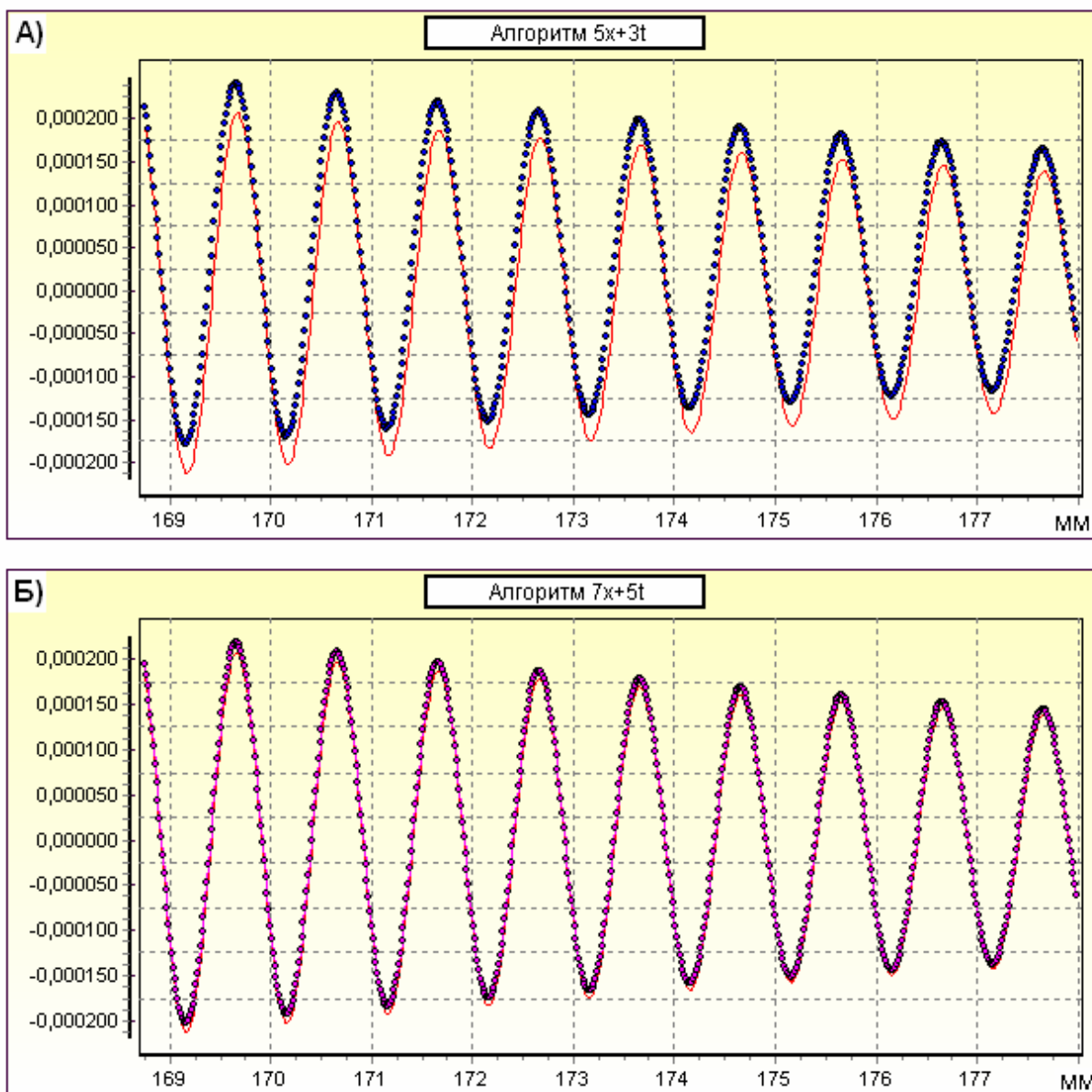


Рис. 7. Расчет волн в среде с внутренним трением.

Источник возбуждения, непрерывный синусоидальный сигнал частотой 5МГц, расположен в начале координат  $x=0$ .

А) Алгоритм  $5x+3t$ .

Б) Алгоритм  $7x+5t$ .

На Рис.8 показан момент времени, когда отраженный и прошедший импульсы расходятся от границы. Расчет проведен алгоритмом  $5x+5t$ . Хорошо видно, что каждый из сигналов имеет свою длину волны и амплитуду. Отметим, что отраженный импульс инвертирован. Получены численные значения амплитуд волн: отраженный импульс – 0,2497, прошедший импульс 0,7506. Так как возбуждающий сигнал (Рис.3) имеет амплитуду, равную единице, то амплитуды отраженной и прошедшей волн численно равны коэффициентам отражения и прохождения соответственно. Как известно, коэффициент отражения  $R$  и прохождения  $D$  выражаются через акустические импедансы следующим образом

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad D = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Откуда получим теоретические значения коэффициентов  $R=-0,25$ ,  $D=0,75$ . Таким образом, метод КРВО позволяет с высокой точностью моделировать явления отражения и прохождения волн через границу двух сред.

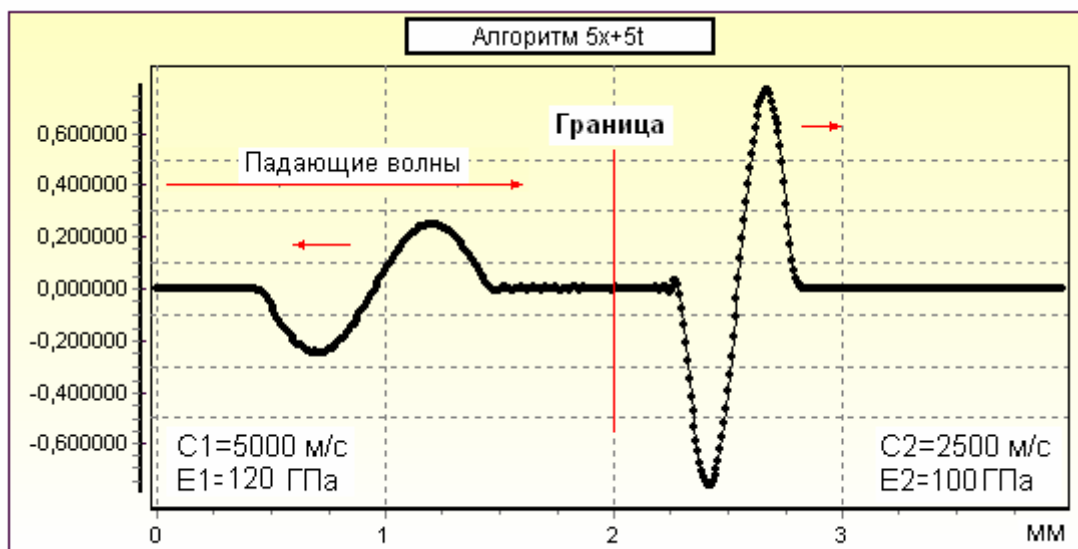


Рис. 8. Прохождение и отражение волн на границе раздела двух сред.  
Амплитуда падающих волн равна 1.  
Слева – отраженная волна, справа – прошедшая волна.

В заключение сформулируем требования к реализации на ЭВМ конечно разностного метода во временной области.

1. Рационально применять алгоритмы  $5x+5t$  и  $7x+5t$ . Они обеспечивают высокое качество расчетов при относительно крупном шаге сетки.
2. Шаг сетки в пространстве следует выбирать из эмпирического условия

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{MIN}}{40}, \text{ где } \lambda_{MIN} - \text{минимальная длина волны в данной задаче.}$$

3. Шаг сетки по времени выбирается из условия устойчивости алгоритма с учетом требований точности вычислений. Эмпирическое условие

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2C_{MAX}}, \text{ где } C_{MAX} - \text{максимальная скорость волн.}$$

При соблюдении указанных требований обеспечивается погрешность вычисления волновых процессов не более 3% в диапазоне пробега волн до  $500 \cdot \lambda$ .

## Список литературы

1. E. Martinod, P. Nadeau, N. Feix, M. Lalande-Guionie, A. Reineix, and B. Jecko. Transmission link radiation and localized defect contribution. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 43(2):109-116, May 2001.
2. T. Martin and L. Pettersson. Dispersion compensation for Huygens' sources and far-zone transformation in FDTD. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(4):494-501, April 2000.
3. S. Martynyuk. Investigation and optimization of a waveguide slot antenna array by finite-difference time-domain method. In *Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, MMET 2000*, volume 1, pages 166-168, Kharkov, Ukraine, September 2000.
4. F. Moglie. Covgergence of the reverberation chambers to the equilibrium analyzed with the finite-difference time-domain algorithm. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 46(3):469-476, August 2004.
5. X. Millard and Q. H. Liu. Simulation of near-surface detection of objects in layered media by the BCGS-FFT method. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(2):327-334, February 2004.
6. X. Yuan, D. Borup, J. W. Wiskin, M. Berggren, R. Eidsens, and S. A. Johnson. Formulation and validation of Berenger's PML absorbing boundary for the FDTD simulation of acoustic scattering. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 44(4):816-822, July 1997.
7. N. Morita, T. Hiromi, O. Nakamura, and K. Okazaki. Cylindrical coordinates three-dimensional FD-TD analysis of ultrasonic pulse propagation in biological tissues. *Transactions of the IEICE A*, J81-A(1):9-16, 1998. In Japanese.
8. X. Yuan, D. Borup, J. Wiskin, M. Berggren, and S. A. Johnson. Simulation of acoustic wave propagation in dispersive media with relaxation losses by using FDTD method with PML absorbing boundary condition. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 46(1):14-23, January 1999.
9. R. S. Schechter, K. E. Simmonds, N. K. Batra, R. B. Mignogna, and P. P. Delsanto. Use of a transient wave propagation code for 3D simulation of CW radiated transducer fields. *Ultrasonics*, 37(2):89-96, February 1999.
10. M. Torres and F. R. Montero de Espinosa. Ultrasonic band gaps and negative refraction. *Ultrasonics*, 42(1-9):787-790, April 2004.
11. R. S. Schechter, K. E. Simmonds, and R. B. Mignogna. Computational and experimental investigation of the fields generated by a 1-3 piezocomposite transducer. *Ultrasonics*, 39(3):163-172, April 2001.
12. S. Mensah and R. Ferriere. Diffraction tomography: A geometric distortion free procedure. *Ultrasonics*, 42(1-9):677-682, April 2004.
13. Н.Н.Калиткин Численные методы. –М: Наука, 1978 –512с.
14. Л.И.Турчак Основы численных методов. –М: Наука, 1987 –320с.