

Решение волновых уравнений методом конечных разностей во временной области. Двумерная задача. Основные соотношения.

Бархатов В.А.

В статье рассматриваются основные теоретические соотношения метода конечных разностей во временной области, сформулированные для двумерной акустической задачи. В теоретической модели учитывается анизотропия упругих свойств и внутреннее трение. Приводится алгоритм, реализующий двухслойную конечно-разностную схему вычислений, который выполняет расчет волновых процессов в задачах со сколь угодно сложными граничными условиями.

В области ультразвуковой дефектоскопии широко распространен подход аналитического решения волнового уравнения. Во многих практических применениях, в задачах распространения волн для нескольких контактирующих сред с криволинейными границами аналитические решения получаются настолько сложными, что разобраться в них практически невозможно.

Альтернативой является получение численных решений волнового уравнения, моделирование волнового процесса и графическое представление решений. Здесь применяют метод конечных разностей во временной области – КРВО. В настоящее время наибольшее распространение получил метод вычислений по двухслойной конечно-разностной схеме использующей скорость колебаний среды и тензор напряжений. В зарубежной литературе используют сокращение VS-FDTD (Velocity-Stress Finite Difference Time Domain). Впервые, в 1966г. двухслойный алгоритм КРВО был сформулирован К.С.Йе [1] для уравнений Максвелла. Впоследствии R.Madariaga [2] и J.Virieux [3,4] 1984-86 гг. разработали двухслойную схему КРВО скорость – тензор напряжений для волнового уравнения в упругой среде.

Начиная с 90-х годов прошлого века и до настоящего времени алгоритм КРВО скорость – тензор напряжений приобретает все большую популярность в связи с бурным развитием вычислительной техники [5-8].

Главное достоинство данного подхода состоит в том, что граничные условия естественным образом входят в алгоритм расчета. Нет необходимости в каких-либо дополнительных вычислениях параметров волн на границах раздела двух сред. Кроме того, в двухслойной схеме вычисляются производные первого порядка по координатам и времени. Это дает более высокую точность по сравнению классическим волновым уравнением, в котором необходим расчет производных второго порядка.

Одна из проблем применения метода КРВО заключается в необходимости использования мощных высокопроизводительных ЭВМ с большим объемом оперативной памяти. Персональные ЭВМ пока еще не имеют достаточных ресурсов для решения трехмерных акустических задач разумных размеров.

В данной работе поставим задачу сформулировать соотношения метода КРВО для волнового уравнения в двумерном пространстве. Установим ортогональную систему координат x_1, x_2 . Используем модель Кельвина вязкоупругой среды [9]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \quad (1)$$

где: σ_{ij} - тензор напряжений [Па], ε_{ij} - тензор деформаций, C_{ijkl} - тензор упругости [Па], η_{ijkl} - тензор вязкости [Па*с], t - время [с].

Закон упругости в форме (1) представляет собой параллельное соединение упругого элемента со свойствами C_{ijkl} и элемента трения, который характеризуется тензором вязкости η_{ijkl} .

Для описания бесконечно малых деформаций используют линейризованное представление тензора ε_{kl} , который выражен через вектор смещения среды U_i следующим образом

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \quad (2)$$

В конечно-разностном алгоритме требуется указать связь скорости изменения тензора напряжений со скоростью вектора смещения среды. Проведем дифференцирование соотношения (1) по времени. Обозначим скорость перемещения точки среды v_i . Очевидно

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \eta_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial t} + \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_k \partial t} \right). \quad (3)$$

Запишем второй закон Ньютона для сплошной среды

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad (4)$$

где: ρ - плотность [КГ/м³], F_i - [Н] компоненты вектора сторонних сил, действующих на среду.

Уравнения (3) и (4) образуют замкнутую систему уравнений акустической задачи. Их совместное решение однозначно определяет все волновые процессы, происходящие в данной совокупности тел, границ раздела и условий возбуждения.

Запишем системы уравнений (3) и (4) в раскрытом виде. Используем матричные обозначения тензоров учитывая, что тензор упругости C_{ijkl} и тензор вязкости η_{ijkl} обладают одинаковой симметрией. Как известно тензоры 4-го ранга симметричны по перестановке пар индексов (ij) и (kl). Кроме того, они симметричны при перестановках индексов в парах (ij)=(ji) и (kl)=(lk). В двумерной задаче существует три различные комбинации пар индексов, обозначим их (11)-> (1), (22)-> (2), (12)=(21)-> (6). В итоге получим два матричных уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{16} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{26} \\ \eta_{16} & \eta_{26} & \eta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial t} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial t} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решением уравнений (5,6) являются зависимости компонент вектора скорости и тензора напряжений от координат x_1, x_2 и времени t – $v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2(x_1, x_2, t)$ и $\sigma_{11}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{12}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{22}(x_1, x_2, t)$.

Существуют некоторые особенности интерпретации двумерных решений волнового уравнения в трехмерном пространстве. Фактически полагают, что расчет ведется для фронта волны бесконечного по оси x_3 (см. Рис.1). Кроме того, все границы раздела сред также бесконечны в направлении оси x_3 . Вектор скорости среды U_i всегда лежит в плоскости x_1, x_2 .

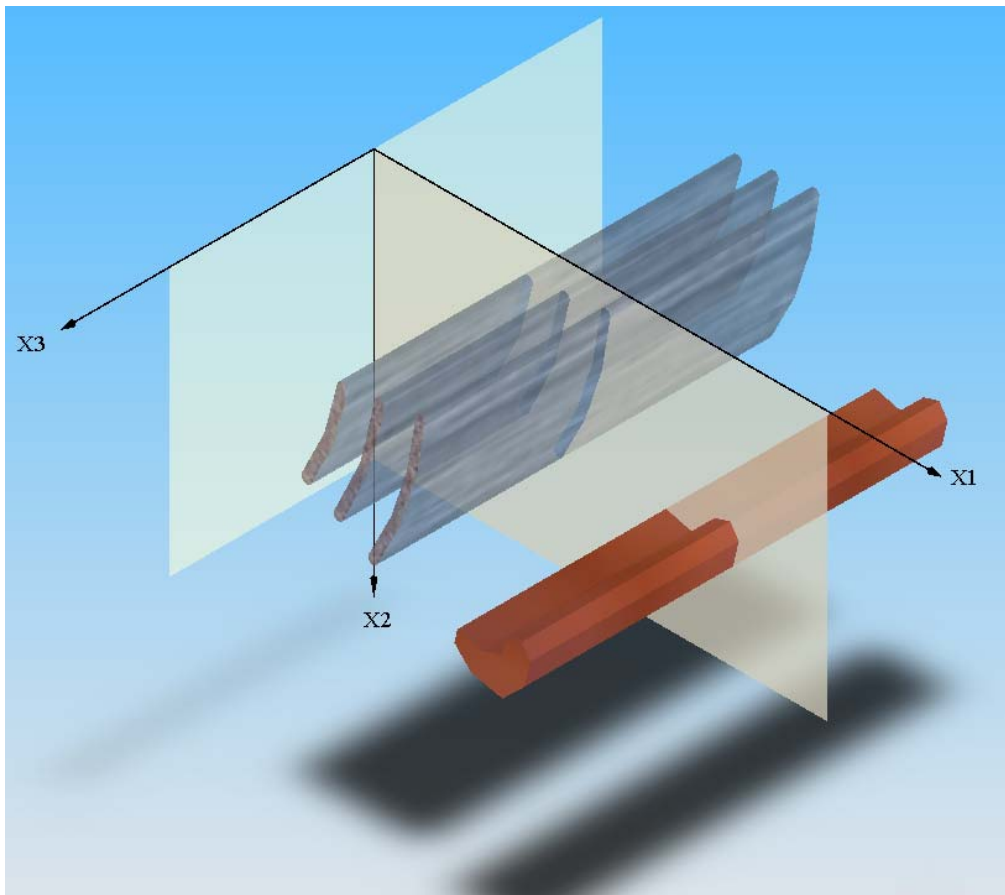


Рис.1. Интерпретация решений двумерной акустической задачи (x_1, x_2) в трехмерном пространстве.

Тензор напряжений определен только в плоскости x_1, x_2 . Эти обстоятельства накладывает ограничение на двумерное представление анизотропной среды. Точное решение может быть получено, если ось координат x_3 как минимум является осью инверсионной симметрии, т.е.

при изменении направления оси x_3 на противоположное упругие и вязкие свойства среды остаются без изменения.

При произвольной ориентации монокристалла относительно системы координат x_1, x_2, x_3 компоненты тензора упругости получают по известным правилам преобразования [10]

$$C_{ijkl} = n_i^\alpha n_j^\beta n_k^\gamma n_l^\tau C_{\alpha\beta\gamma\tau}, \quad (7)$$

$$n_i^\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \quad (8)$$

Здесь, x_1, x_2, x_3 - система координат задачи, в которой решается волновое уравнение и в ней же представлен тензор упругости C_{ijkl} . Кристаллографическая система координат y_1, y_2, y_3 установлена по осям симметрии монокристалла, в ней тензор упругости $C_{\alpha\beta\gamma\tau}$ имеет наиболее простой вид. Тензор преобразования координат n_i^α допускает только операции вращения. В этом случае он обладает свойством $\det n_i^\alpha = 1$.

Итак, чтобы получить компоненты тензора упругости задачи (5), нужно установить ориентацию монокристалла и найти тензор n_i^α . Затем, по формуле (7), вычисляется тензор упругости C_{ijkl} в трехмерной системе координат x_1, x_2, x_3 . Далее производят отбор упругих констант, действующих в плоскости x_1, x_2 - анализируются компоненты C_{ijkl} для пар индексов (11) \rightarrow (1), (22) \rightarrow (2), (12)=(21) \rightarrow (6). В итоге формируется двумерное матричное представление тензора упругости. Совершенно аналогично производится преобразование тензора вязкости.

Известно, что в анизотропных материалах волновой вектор в общем случае не совпадает по направлению с вектором смещения и вектором скорости среды. Это относится ко всем типам волн. Операция отбора упругих констант для двумерной задачи автоматически обнуляет компоненту вектора скорости и компоненты тензора напряжений по оси x_3 . Необходимо отметить, что тогда будет найдено приближенное решение волнового уравнения.

Рассмотрим теперь более простые варианты вязко-упругих сред. Для изотропной среды уравнения (5) сильно упрощаются, поскольку упругие и вязкие свойства обладают симметрией бесконечного порядка

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \eta_\lambda + 2\eta_\mu & \eta_\lambda & 0 \\ \eta_\lambda & \eta_\lambda + 2\eta_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta_\mu \end{pmatrix}, \quad (9)$$

λ, μ - постоянные Ламе. Если известны скорости продольной V_L и поперечной V_T волн в материале, постоянные Ламе находят по формулам

$$\lambda = \rho(V_L^2 - 2V_T^2), \quad \mu = \rho V_T^2 \quad (10)$$

В случае жидкости или газа 4 тензорные константы отличны от нуля

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_L & \lambda_L & 0 \\ \lambda_L & \lambda_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \eta_\lambda & \eta_\lambda & 0 \\ \eta_\lambda & \eta_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Модуль упругости жидкой или газообразной среды можно определить из известного соотношения $\lambda_L = \rho \cdot V^2$, где V - скорость продольных волн.

Остановимся на вопросе, каким образом найти компоненты тензора вязкости? Рассмотрим для простоты одномерный случай. Тогда выражения (1) и (4) принимают вид

$$\sigma = E \frac{\partial U}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}, \quad \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Продифференцируем закон Кельвина по координате и подставим в него выражение второго закона Ньютона. В результате получим классическое одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}, \quad (12)$$

Здесь введена константа $V = \sqrt{E/\rho}$ - скорость волны.

Пусть имеется гармоническая волна, бегущая в положительном направлении оси x

$$U_0 \exp[j(\omega t - Kx)], \quad (13)$$

ω - круговая частота, K - волновое число.

Подставляя решение (13) в уравнение (12) получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = V^2 K^2 + j\omega \frac{\eta}{\rho} K^2, \quad (14)$$

которое устанавливает связь между волновым числом и круговой частотой. Введем обозначения $K_0 = \omega/V$ - волновое число на низких частотах и $\xi = \frac{\eta\omega}{\rho V^2}$ - параметр затухания. Решение дисперсионного уравнения принимает вид

$$K = \pm K_0 \sqrt{1 + \xi^2 - j \frac{\xi}{1 + \xi^2}}. \quad (15)$$

Затухающей волне соответствуют действительная и мнимая части волнового числа

$$\text{Re } K = K_0 \text{Cos} \left[\text{arctg} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right], \quad \text{Im } K = K_0 \text{Sin} \left[\text{arctg} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (16)$$

Видно, что в среде с внутренним трением у волн появляется частотно-зависимый коэффициент затухания $\alpha = \text{Im} K$ и дисперсия скорости из-за нелинейной зависимости волнового числа $\text{Re} K$ от частоты. В действительных функциях волновой процесс представлен следующим образом

$$U(x, t) = U_0 \exp(-\alpha x) \cdot \cos[\omega t - \text{Re} K \cdot x].$$

Выполним разложение коэффициента затухания в степенной ряд по круговой частоте. Ограничим ряд членами до ω^2 . В итоге получим приближенное выражение, связывающее коэффициент затухания и вязкость материала

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\eta \omega^2}{\rho V^3}. \quad (17)$$

Данная формула демонстрирует известный факт, что на относительно низких частотах волны в вязкоупругом материале обладают затуханием пропорциональным квадрату частоты.

Как правило в экспериментах при известной частоте ультразвуковых колебаний f [Гц] определяют ослабление волн пропорциональное длине пробега и выражают его с помощью коэффициента затухания D [дБ/м]. Очевидна связь коэффициентов затухания $D = 20 \cdot \log(\exp(\alpha))$, откуда $\alpha = \ln(10^{D/20})$. Теперь из формулы (17) нетрудно найти константу вязкости

$$\eta \approx \frac{2\alpha \rho V^3}{\omega^2}. \quad (18)$$

В случае жидкости или газообразной среды компоненту тензора вязкости η_λ определяют из выражения (18) подставляя коэффициент затухания α , частоту f , плотность и скорость продольных волн V . Для изотропного твердого тела ситуация немного сложнее. Вязкость растяжения-сжатия $\eta_L = \eta_\lambda + 2\eta_\mu$ находят по данным затухания продольной волны и скорости V_L . Сдвиговую вязкость η_μ определяют по данным затухания и скорости V_T поперечных волн. Компоненту вязкости для комбинированных напряжений определяют из соотношения (9) $\eta_\lambda = \eta_L - 2\eta_\mu$.

Изложенный принцип также применим для определения компонент тензора вязкости анизотропного материала.

Обсудим технологию решения волновых уравнений (5,6) методом конечных разностей во временной области. Здесь производится дискретизация пространства и времени с некоторым шагом $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta t$. Непрерывные функции заменяют их дискретными аналогами. Формируется сетка решений волнового уравнения. Индексы i, j характеризуют точку в пространстве $x_1 = i\Delta x_1, x_2 = j\Delta x_2$, индекс k указывает временной слой $t = k\Delta t$.

Приведем для справки конечно-разностные формулы вычисления производных. Пусть имеется некоторая величина A , зависящая от времени t . Также известны значения $A^{k-1/2} = A(k\Delta t - \Delta t/2)$ и $A^{k+1/2} = A(k\Delta t + \Delta t/2)$ вблизи точки $k\Delta t$. Тогда приближенное значение первой производной по времени можно найти по формуле

$$\frac{\partial A^k}{\partial t} \approx \frac{A^{k+1/2} - A^{k-1/2}}{\Delta t} \quad (19)$$

Данное выражение представляет центральную разностную схему расчета производной.

Оценку первых производных по координатам в точке $(i\Delta x_1, j\Delta x_2)$ выполним также по центральной разностной схеме

$$\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_1} \approx \frac{1}{2\Delta x_1} (A_{i+1/2,j+1/2} - A_{i-1/2,j+1/2} + A_{i+1/2,j-1/2} - A_{i-1/2,j-1/2}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_2} \approx \frac{1}{2\Delta x_2} (A_{i+1/2,j+1/2} - A_{i+1/2,j-1/2} + A_{i-1/2,j+1/2} - A_{i-1/2,j-1/2})$$

Учет вязкости материала требует вычисления комбинированной производной по координате и времени. Воспользуемся данными о производных по координатам (20) во временных слоях k и $k-1$, тогда можно записать простые выражения

$$\frac{\partial^2 A_{i,j}^k}{\partial x_1 \partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial A_{i,j}^k}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{i,j}^{k-1}}{\partial x_1} \right), \quad \frac{\partial^2 A_{i,j}^k}{\partial x_2 \partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial A_{i,j}^k}{\partial x_2} - \frac{\partial A_{i,j}^{k-1}}{\partial x_2} \right). \quad (21)$$

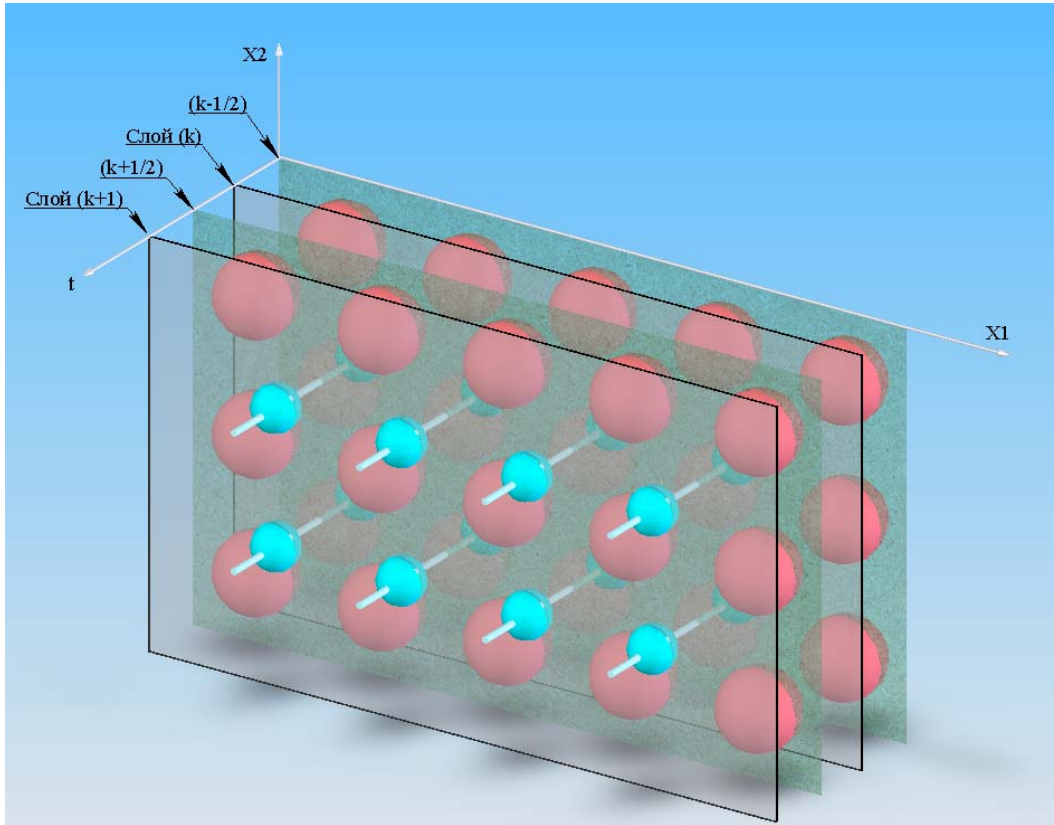


Рис.2. Расположение узлов в двухслойной схеме КРВО.

Чтобы получить алгоритм расчета нужно в формулы (5,6) подставить конечно-разностное представление частных производных (19-21). Для уменьшения погрешностей конечно-разностных схем тензор напряжений будем определять в узлах $(i\Delta x_1, j\Delta x_2, k\Delta t)$, а расчеты вектора скорости сдвинем на $-1/2$ шага дискретизации в пространстве и времени $((i-1/2)\Delta x_1, (j-1/2)\Delta x_2, (k-1/2)\Delta t)$.

Расположение узлов сетки показано на Рис.2. Красным цветом помечены узлы массы. В них определяется вектор скорости. Узлы малого размера, отмеченные голубым цветом, - узлы сил. В этих точках находят тензор напряжений.

Вначале преобразуем второй закон Ньютона (6). Представим формулы так, чтобы значение скорости в новый момент времени $(k+1/2)\Delta t$ были выражены в явном виде

$$\begin{aligned}
S111 &= \frac{1}{2\Delta x_1} (\sigma11_{i,j}^k - \sigma11_{i-1,j}^k + \sigma11_{i,j-1}^k - \sigma11_{i-1,j-1}^k), \\
S121 &= \frac{1}{2\Delta x_1} (\sigma12_{i,j}^k - \sigma12_{i-1,j}^k + \sigma12_{i,j-1}^k - \sigma12_{i-1,j-1}^k), \\
S122 &= \frac{1}{2\Delta x_2} (\sigma12_{i,j}^k - \sigma12_{i,j-1}^k + \sigma12_{i-1,j}^k - \sigma12_{i-1,j-1}^k), \\
S222 &= \frac{1}{2\Delta x_2} (\sigma22_{i,j}^k - \sigma22_{i,j-1}^k + \sigma22_{i-1,j}^k - \sigma22_{i-1,j-1}^k), \\
v1_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2} &= v1_{i-1/2,j-1/2}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho} (S111 + S122 + F_1), \\
v2_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2} &= v2_{i-1/2,j-1/2}^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho} (S121 + S222 + F_2).
\end{aligned} \tag{22}$$

Конечно-разностное представление закона Кельвина (5) дает выражения для расчета тензора напряжений в момент времени $(k+1)\Delta t$. Вычисления удобно выполнять по частям.

Производные вектора скорости по координатам во временном слое $k+1/2$.

$$\begin{aligned}
V11 &= \frac{1}{2\Delta x_1} (v1_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v1_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} + v1_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} - v1_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2}), \\
V22 &= \frac{1}{2\Delta x_2} (v2_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v2_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} + v2_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v2_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2}), \\
V12 &= \frac{1}{2\Delta x_2} (v1_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v1_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} + v1_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v1_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2}) + \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta x_1} (v2_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - v2_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2} + v2_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2} - v2_{i-1/2,j-1/2}^{k+1/2}).
\end{aligned} \tag{23}$$

Производные вектора скорости по координатам во временном слое $k-1/2$.

$$N11 = \frac{1}{2\Delta x_1} (v1_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} - v1_{i-1/2,j+1/2}^{k-1/2} + v1_{i+1/2,j-1/2}^{k-1/2} - v1_{i-1/2,j-1/2}^{k-1/2}),$$

$$N22 = \frac{1}{2\Delta x_2} \left(v2_{i+1/2, j+1/2}^{k-1/2} - v2_{i+1/2, j-1/2}^{k-1/2} + v2_{i-1/2, j+1/2}^{k-1/2} - v2_{i-1/2, j-1/2}^{k-1/2} \right), \quad (24)$$

$$N12 = \frac{1}{2\Delta x_2} \left(v1_{i+1/2, j+1/2}^{k-1/2} - v1_{i+1/2, j-1/2}^{k-1/2} + v1_{i-1/2, j+1/2}^{k-1/2} - v1_{i-1/2, j-1/2}^{k-1/2} \right) + \frac{1}{2\Delta x_1} \left(v2_{i+1/2, j+1/2}^{k-1/2} - v2_{i-1/2, j+1/2}^{k-1/2} + v2_{i+1/2, j-1/2}^{k-1/2} - v2_{i-1/2, j-1/2}^{k-1/2} \right)$$

Комбинированные производные, не нормированные на шаг по времени

$$D11 = V11 - N11, \quad D22 = V22 - N22, \quad D12 = V12 - N12. \quad (25)$$

Расчет компонент тензора напряжений во временном слое $k+1$

$$\sigma11_{i,j}^{k+1} = \sigma11_{i,j}^k + \Delta t (C_{11}V11 + C_{12}V22 + C_{16}V12) + \eta_{11}D11 + \eta_{12}D22 + \eta_{16}D12,$$

$$\sigma22_{i,j}^{k+1} = \sigma11_{i,j}^k + \Delta t (C_{12}V11 + C_{22}V22 + C_{26}V12) + \eta_{12}D11 + \eta_{22}D22 + \eta_{26}D12, \quad (26)$$

$$\sigma12_{i,j}^{k+1} = \sigma12_{i,j}^k + \Delta t (C_{16}V11 + C_{26}V22 + C_{66}V12) + \eta_{16}D11 + \eta_{26}D22 + \eta_{66}D12.$$

Посмотрим, как выполняется расчет волн. Пусть в момент времени $(k-1/2)\Delta t$ известно поле скоростей точек среды и в момент $k\Delta t$ известно поле тензора напряжений. На первом этапе по формулам (22) производится расчет скоростей на половине шага во времени $(k+1/2)\Delta t$. На втором этапе находим поле тензора напряжений в момент времени $(k+1)\Delta t$ по формулам (23-26).

Расчет волнового процесса производят циклически, каждый раз вычисляют компоненты вектора скорости $v1_{i-1/2, j-1/2}^{k+1/2}$, $v2_{i-1/2, j-1/2}^{k+1/2}$ на $1/2$ шага по времени и затем определяют тензор напряжений $\sigma11_{i,j}^{k+1}$, $\sigma22_{i,j}^{k+1}$, $\sigma12_{i,j}^{k+1}$ в новом временном слое. В сущности, алгоритм КРВО производит экстраполяцию локального решения из прошлого в будущее.

Наибольший интерес представляет решение акустических задач для нескольких контактирующих сред. Здесь в некоторой области сетки устанавливают свойства какой либо одной среды, другая область сетки должна обладать свойствами другой среды. Возникают границы между ближайшими узлами с различными физическими свойствами. Границы аппроксимируются совокупностью горизонтальных и вертикальных отрезков, проходящих по узлам напряжений. Естественно ступеньки дискретизации на наклонных и криволинейных границах должны быть намного меньше длины волны. Поскольку в представленном алгоритме всегда определяется тензор напряжений, силовые взаимодействия на границах раздела сред учитывается автоматически [3,4]. Это свойство двухслойной конечно-разностной схемы (22-26) обеспечивает удобство и простоту в программировании задач со сложными криволинейными границами материалов.

Представленная схема вычислений называется явной [10,11]. Необходимо отметить, что все алгоритмы, построенные таким способом, являются условно устойчивыми. Вычислительный процесс сходится (устойчив), если выполняется соотношение между шагами сетки в пространстве Δx и во времени Δt

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{C_{MAX}}. \quad (26)$$

Здесь C_{MAX} - максимальная скорость волн из всех контактирующих сред. Устойчивость алгоритма еще не означает, что погрешности вычислений будут малыми. В работе [12] проведено исследование погрешностей различных вариантов алгоритмов КРВО. Сформулированы рекомендации к выбору параметров дискретизации.

1. Шаг сетки в пространстве следует выбирать из эмпирического условия

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{MIN}}{40}, \text{ где } \lambda_{MIN} \text{ - минимальная длина волны в данной задаче.}$$

2. Шаг сетки по времени выбирается из условия устойчивости алгоритма с учетом требований точности вычислений. Эмпирическое условие

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2C_{MAX}}, \text{ где } C_{MAX} \text{ - максимальная скорость волн.}$$

В приложении к данной статье приводится пример реализации двухслойной конечно-разностной схемы на языке Object Pascal. Выражения (22-26) используют дробные значения индексов. Это не приемлемо в программах. Объединим в одну структуру данных тензор напряжений в точках (i, j, k) , $(i, j, k + 1)$ и вектор скорости в точках $(i - 1/2, j - 1/2, k - 1/2)$, $(i - 1/2, j - 1/2, k + 1/2)$. Проведем смещение индексов вектора скорости на $+1/2$ шага дискретизации, тогда индексы скоростей и тензора напряжений станут одинаковыми. Индексация величин в выражениях (22-26) изменится соответственно.

Далее не имеет смысла хранить в памяти ЭВМ все временные слои. Достаточно выполнить расчет величин в будущем (в новом временном слое) используя данные в настоящем (временной слой с известным решением). В конце каждого цикла вычислений проводится перезагрузка данных из будущего в настоящее. В некоторые моменты времени необходимо провести анализ данных, визуализацию результатов расчета.

Данные узлов организованы в структуру Node, которая содержит короткие массивы компонент вектора скорости U1, U2, компоненты тензора напряжений S11, S22, S12, силу возбуждения F1, F2 и ссылку на физические характеристики материала Body.

Сетка с именем Net декларирована в виде динамического двумерного массива структур типа Node. Созданием и уничтожением сетки в памяти компьютера занимаются процедуры Create_FDTD_2D_Net и Free_FDTD_2D_Net.

Начальное состояние сетки формирует процедура Fill_All_Net_Body, которая заполняет все структуры Node ссылкой на тело Body и обнуляет данные. В зависимости от решаемой задачи эта процедура должна модифицироваться, т.к. необходимо заполнить различные области сетки ссылками на свои материалы.

Алгоритм КРВО реализован в процедуре Calculate_New_Time_Layer. Вычисления проводятся в два этапа. Сначала программа проходит все узлы и выполняет расчет вектора скорости, затем по всем узлам сетки вычисляется тензор напряжений. В конце производится перезагрузка данных – вызывается процедура ReLoad_FDTD_2D_Net. Расчеты организованы в процедурах Calculate_New_Velocity_Vector и Calculate_New_Stress_Tensor.

Возможности алгоритма КРВО продемонстрируем на некоторых примерах. На Рис.3 показан расчет волнового процесса в монокристалле железа. Изображение представляет яркостную картину модуля вектора скорости. Черный цвет – максимальная скорость, белый цвет – нет колебаний. Параметры сетки указаны на рисунке.

Оси симметрии упругих свойств монокристалла совпадают с горизонтальной и вертикальной осями рисунка. Возбуждение волн проводилось точечным источником силы, расположенным в центре. Красной стрелкой показано направление силы. Во времени сила

задавалась в виде положительной полуволны синусоидального сигнала длительностью 0,1 мкс. На Рис.3. зафиксированы волны в момент 1,5 мкс от начала возбуждения.

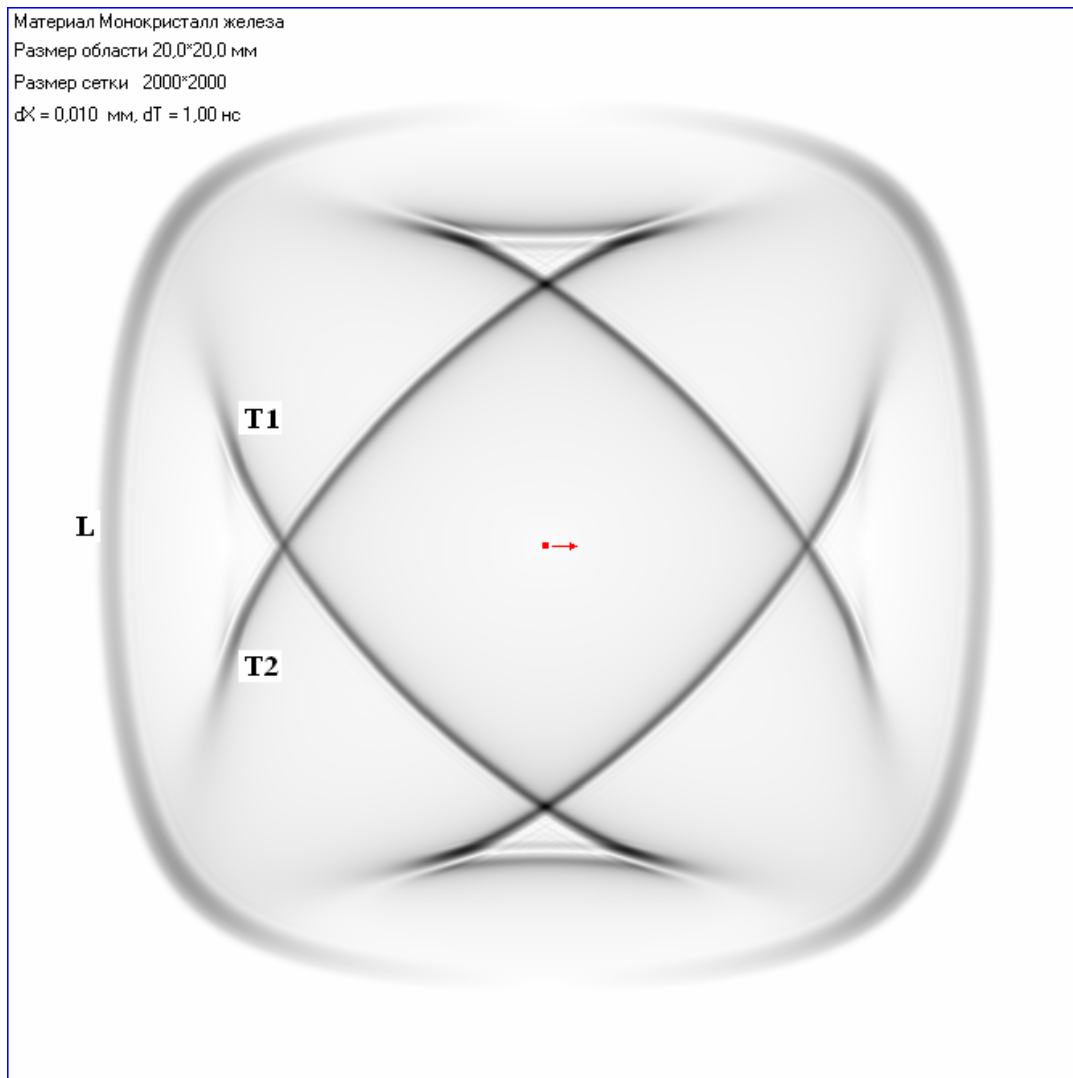


Рис.3. Волны точечного источника горизонтальной силы в монокристалле железа.

$$C_{11}=243 \text{ ГПа}, C_{12}=138 \text{ ГПа}, C_{66}=122 \text{ ГПа}, \rho = 7,8 \text{ КГ/дм}^3.$$

Зондирующий импульс длительностью 0,1 мкс. Время пробега волн 1,5 мкс.

В монокристалле железа возбуждаются продольные волны **L**, распространяющиеся влево и вправо. Форма фронта продольной волны отражает изменение скорости в зависимости от направления. Кроме того, формируются две моды поперечных волн. Они условно обозначены **T1**, **T2**. В направлениях кристаллографических осей скорости мод совпадают, т.к. это оси симметрии 4-го порядка. У материалов с кубической симметрией упругих свойств модуль сдвига изотропен вдоль кристаллографических осей.

Отметим, что в направлении диагонали рисунка медленная мода поперечных волн хорошо возбуждается, а быстрая мода отсутствует. Вектор поляризации медленной моды поперечных волн лежит в плоскости задачи x_1, x_2 , а вектор поляризации быстрой моды направлен по оси x_3 (см. Рис.1). В двумерной акустической задаче отсутствуют решения для волн с поляризацией по оси x_3 , поэтому быстрая мода поперечных волн никогда не возбуждается.

На Рис.4. показаны волны, излучаемые точечным источником силы на свободной поверхности стали. Верхняя часть сетки заполнена вакуумом, нижняя часть – сталь. Граница имеет наклон 14° . Источник силы расположен в центре сетки. Направление силы перпендикулярно свободной поверхности. Как и в предыдущем численном эксперименте волны возбуждались импульсом 0,1 мкс.

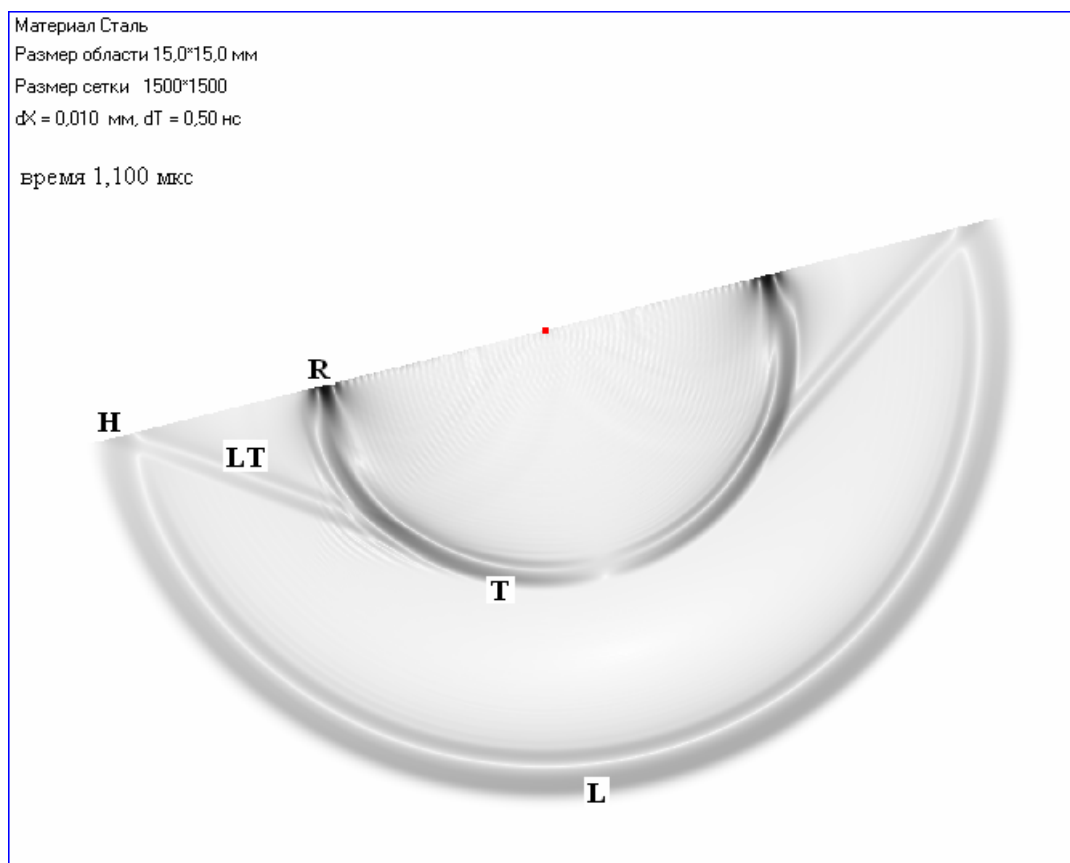


Рис.4. Волны точечного источника нормальной силы, расположенного на свободной поверхности стали. $\lambda = 109$ ГПа, $\mu = 83$ ГПа, $\rho = 7,8$ КГ/дм³. Зондирующий импульс длительностью 0,1 мкс.

Амплитуды разных типов волн сильно различаются. Также имеются большие изменения амплитуды волны в пределах фронта. Поэтому на Рис.4. проведено выравнивание интенсивности – показана яркостная картина величины $\sqrt[4]{v_1^2 + v_2^2}$.

Источник нормальной силы возбуждает продольные **L** и поперечные **T** волны. В зоне поверхности стали образуется волна Рэлея **R** и головная волна **H**. В частности головная волна генерирует фронт поперечных волн **LT**, распространяющихся под третьим критическим углом (для стали 33°).

Явления интерференции и дифракции волн демонстрирует Рис.5. Здесь излучатель размером 2,5мм возбуждает продольные волны в воде. Он отмечен красным цветом. Зондирующий импульс в форме одной полуволны синусоидального сигнала имеет длительность 0,25 мкс. В центре рисунка установлен отражатель диаметром 2 мм, материал – вакуум.

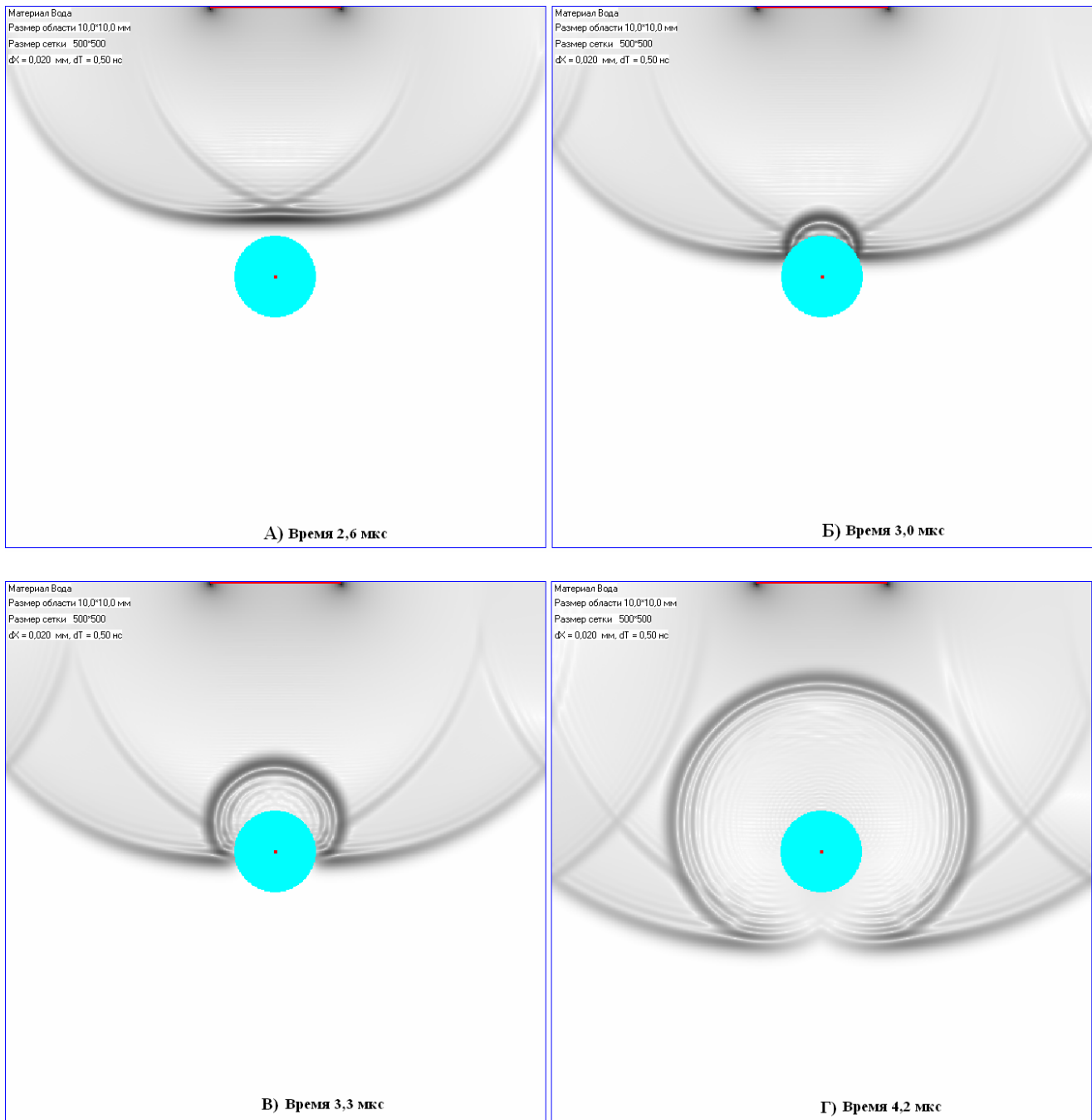


Рис.5. Различные стадии отражения волн в воде от цилиндра диаметром 2 мм со свойствами вакуума. $\lambda_L = 2,25$ ГПа, $\rho = 1$ КГ/дм³. Излучатель продольных волн длиной 2,5 мм. Зондирующий импульс длительностью 0,25 мкс.

На Рис.5.А хорошо видна интерференционная картина излучения. Колебания какой-либо точки среды в данный момент времени есть сумма волн пришедших от различных элементов поверхности излучателя. Поскольку различается длина пробега от элемента поверхности излучателя до точки наблюдения – образуется сложный фронт колебаний.

Явление дифракции волн, т.е. их способность огибать препятствия, демонстрируют Рис.5 В,Г.

В данной работе представлен алгоритм конечных разностей во временной области для двумерного волнового уравнения. Тем не менее, остаются в стороне ряд вопросов. В первую

очередь необходимо утилизировать волны на границах сетки. Если этого не делать образуются волны отраженные от границ сетки. В частности такие процессы хорошо видны на Рис.5 В,Г. Здесь используют искусственные схемы расчета реализующие поглощение волн без эффекта отражения [13-16].

Графическое представление волновых процессов посредством модуля вектора скорости не всегда наглядно. Хотелось бы разделить продольные и поперечные волны на изображении, окрасить их в разные цвета. В этом случае удобней получить решение для скалярного и векторного потенциалов. Модифицированные двухслойные схемы КРВО рассматриваются в работах [17,18].

В основных конечно-разностных соотношениях (22-26) использованы простые схемы расчета производных. Моделирование волн с высокой точностью для больших временных интервалов требует очень мелкой дискретизации в пространстве и времени. Следовательно, увеличивается необходимый объем памяти ЭВМ и ее производительность. В расчетах производных можно применить более сложные конечно-разностные соотношения, обладающие повышенной точностью. Тогда получится алгоритм, рационально использующий производительность и память ЭВМ. Данный подход исследован в работе [12] для классического одномерного волнового уравнения.

Автор надеется, что подробное изложение метода КРВО для волнового уравнения в двумерном пространстве стимулирует инженеров и научных работников к выполнению расчетов в сложных акустических задачах.

Список литературы

1. K.S.Yee Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.* Vol. 14, pp. 302-307, 1966.
2. R. Madariaga. Dynamic of an expanding circular fault. *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol 66(3), pp. 639-666, 1976.
3. J. Virieux. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress difference method. *Geophysics*, vol. 49(11), pp.1933-1942, November 1984.
4. J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method. *Geophysics* vol. 51(4), pp. 889–901, 1986.
5. R. W. Graves. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bull. Seismol. Soc. Am.* Vol. 86, pp. 1091–1106, 1996.
6. X. Yuan, D. Borup, J. W. Wiskin, M. Berggren, and S. Johnson. Simulation of acoustic wave propagation in dispersive media with relaxation losses by using FDTD method with PML absorbing boundary conditions. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 46, pp. 14–23, 1999.
7. E. H. Saenger, N. Gold, and S. A. Shapiro. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, vol. 31(1), pp.77-92, January 2000.
8. Y. Q. Zeng and Q. H. Liu. A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109(6), pp. 2571-2580, June 2001.
9. Дж. Мейз Теория и задачи механики сплошной среды. Пер. с англ. М: Изд. Мир. 1974 – 318с.
10. Г.Корн, Т.Корн Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. –М: Наука, 1973. –832с.
11. Л.И.Турчак Основы численных методов. –М: Наука, 1987 –320с.
12. Бархатов В.А. Решение динамических задач акустики методом конечных разностей во временной области. Основные соотношения. Анализ погрешностей. Дефектоскопия, №3, 2005, с. 12-26.
13. C. J. Randall. Absorbing boundary condition for the elastic wave equation. *Geophysics*. Vol. 53, pp 611–624, 1988.
14. C. J. Randall. Absorbing boundary condition for the elastic wave equation: velocity-stress formulation. *Geophysics*. Vol. 54, pp 1141–1152, 1989.
15. R. L. Higdon. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media. *J. Comp. Phys.* Vol. 101, pp 386–418, 1992.
16. Masahiro Sato. Use of velocity potentials in the definition of absorbing boundaries for FDTD analysis of elastic wave fields. *Acoust. Sci. & Tech.* vol. 24, num. 6, pp 415-418, 2003.
17. M. Sato, Y. Takahata, M. Tahara and I. Sakagami. Expression of acoustic fields in solids by scalar and vector velocity potentials. 2001 IEEE Int. Ultrason. Symp. Proc. (2001).
18. M. Sato, Y. Takahata, M. Tahara and I. Sakagami. Expression of contour vibration modes of a square plate by scalar and vector potentials. *Acoust. Sci. & Tech.*, vol. 23, pp 346–349, 2002.

Приложение

Фрагменты кода, реализующего алгоритм КРВО для двумерной акустической задачи. Программы созданы в среде проектирования Delphi 5. Читатель, владеющий основами программирования на языке Object Pascal, без труда поймет работу программ и поместит код в соответствующие секции **unit**, **interface**, **implementation**.

//структура данных узла сетки

type

Node = **record**

U1: **array** [0..1] **of** Real; //компоненты вектора скорости

U2: **array** [0..1] **of** Real; //0- будущее, 1- настоящее

S11: **array** [0..1] **of** Real;

S22: **array** [0..1] **of** Real; //компоненты тензора напряжений

S12: **array** [0..1] **of** Real;

Body: Integer; //ссылки на тело

F1,F2: Real; //сторонняя сила, воздействующая на узел

end;

//объявление переменных

var Net: **array of array of** Node; //динамический массив сетки

var StepX: Real; //шаг сетки в пространстве [мм]

var StepT: Real; //шаг по времени [с]

var imax,jmax: Integer; //размеры сетки

//массивы физических параметров материалов

// 0- вакуум

// 1- вода

// 2- сталь

// 3- монокристалл железа

// 4- монокристалл алюминия

var Ro: **array** [0..4] **of** Real = (1E+0, 1E+3, 7.8E+3, 7.8E+3, 2.73E+3); //плотность [КГ/м³]

//компоненты тензора упругости [Па]

var C11: **array** [0..4] **of** Real = (0, 2.250E+9,275E+9,243E+9, 114E+9);

var C22: **array** [0..4] **of** Real = (0, 2.250E+9,275E+9,243E+9, 114E+9);

var C12: **array** [0..4] **of** Real = (0, 2.250E+9,109E+9,138E+9, 62E+9); //C12=C21

var C66: **array** [0..4] **of** Real = (0,0, 83E+9,122E+9,31.7E+9);

var C16: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0); //C16=C61

var C26: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0); //C26=C62

//компоненты тензора вязкости [Па*с]

var Nu11: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0);

var Nu22: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0);

var Nu12: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0); //Nu12=Nu21

var Nu66: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0);

var Nu16: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0); //Nu16=Nu61

var Nu26: **array** [0..4] **of** Real = (0,0,0,0,0); //Nu26=Nu62


```

//подпрограмма создания сетки, выделение памяти ЭВМ
//Width,Height - ширина и высота поля расчета в метрах, DX - шаг сетки в метрах
procedure Create_FDTD_2D_Net(Width,Height,DX: Real);
var i: Integer;
begin
  imax:= Trunc(Width/DX)+1;
  jmax:= Trunc(Height/DX)+1;
  StepX:=DX;
//назначение сетки
  SetLength(Net, imax+1);
  for i := Low(Net) to High(Net) do SetLength(Net[i], jmax+1);
end;

//освобождение памяти сетки
procedure Free_FDTD_2D_Net;
var i: Integer;
begin
  for i := Low(Net) to High(Net) do SetLength(Net[i], 0);
  SetLength(Net, 0);
end;

//заполнение всей сетки одним телом и обнуление данных
procedure Fill_All_Net_Body(B: Integer);
var i,j,q: Integer;
begin
  for i:=0 to imax do for j:=0 to jmax do begin
    Net[i,j].Body:=B;
    for q:=0 to 1 do begin
      Net[i,j].U1[q]:=0;
      Net[i,j].U2[q]:=0;
      Net[i,j].S11[q]:=0;
      Net[i,j].S22[q]:=0;
      Net[i,j].S12[q]:=0;
    end;
  end;
end;

//перезагрузка временных слоев сетки
procedure ReLoad_FDTD_2D_Net;
var k,l,q: Integer;
begin
  for k:=0 to imax do for l:=0 to jmax do begin
    Net[k,l].U1[1]:=Net[k,l].U1[0];
    Net[k,l].U2[1]:=Net[k,l].U2[0];
    Net[k,l].S11[1]:=Net[k,l].S11[0];
    Net[k,l].S22[1]:=Net[k,l].S22[0];
    Net[k,l].S12[1]:=Net[k,l].S12[0];
  end;
end;

```

```

//ПРОГРАММА ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
//вычисление векторов скорости и тензоров напряжений в новом временном слое
procedure Calculate_New_Time_Layer;
var h,g: Integer;
begin
//здесь нужно вставить силы в определенных узлах сетки для возбуждения волн
//
for h:=1 to imax-1 do for g:=1 to jmax-1 do begin
    Application.ProcessMessages;
    Calculate_New_Velocity_Vector(h,g); //расчет вектора скорости
end;
for h:=1 to imax-1 do for g:=1 to jmax-1 do begin
    Application.ProcessMessages;
    Calculate_New_Stress_Tensor(h,g); //расчет тензора напряжений
end;
//здесь получено решение акустической задачи в новом временном слое
//нужно добавить анализ расчета и(или) представить волны в виде мгновенной фотографии
Reload_FDTD_2D_Net; //перезагрузка слоев сетки
end;

//вычисление вектора скорости в узле в новом временном слое
procedure Calculate_New_Velocity_Vector (i,j: Integer);
var S11_1,S12_2,S12_1,S22_2: Real;
var B: Integer;
begin
B:=Net[i,j].Body;
//расчет пространственных производных тензора напряжений
S11_1:=(Net[i,j].S11[1]-Net[i-1,j].S11[1] + Net[i,j-1].S11[1]-Net[i-1,j-1].S11[1])/2/StepX; //dS11/dx
S12_2:=(Net[i,j].S12[1]-Net[i,j-1].S12[1] + Net[i-1,j].S12[1]-Net[i-1,j-1].S12[1])/2/StepX; //dS12/dy
S12_1:=(Net[i,j].S12[1]-Net[i-1,j].S12[1] + Net[i,j-1].S12[1]-Net[i-1,j-1].S12[1])/2/StepX; //dS12/dx
S22_2:=(Net[i,j].S22[1]-Net[i,j-1].S22[1] + Net[i-1,j].S22[1]-Net[i-1,j-1].S22[1])/2/StepX; //dS22/dy
//вычисление новых значений скоростей с учетом силы, действующей на узел
Net[i,j].U1[0]:=Net[i,j].U1[1] + StepT*( S11_1+S12_2+Net[i,j].F1)/Ro[Net[i,j].Body];
Net[i,j].U2[0]:=Net[i,j].U2[1] + StepT*( S12_1+S22_2+Net[i,j].F2)/Ro[Net[i,j].Body];
end;

//вычисление тензора напряжений в узле в новом временном слое
procedure Calculate_New_Stress_Tensor (i,j: Integer);
var U1_X,U1_Y,U2_X,U2_Y: Real;
var SUM_11,SUM_22,SUM_12: Real;
var N1_X,N1_Y,N2_X,N2_Y: Real;
var D_11,D_22,D_12: Real;
var SS_11,SS_22,SS_12: Real;
var B: Integer;
begin
B:=Net[i,j].Body;
//расчет пространственных производных скоростей в новом временном слое
U1_X:=(Net[i+1,j].U1[0] - Net[i,j].U1[0] + Net[i+1,j+1].U1[0] - Net[i,j+1].U1[0])/2/StepX; //dU1/dx
U1_Y:=(Net[i,j+1].U1[0] - Net[i,j].U1[0] + Net[i+1,j+1].U1[0] - Net[i+1,j].U1[0])/2/StepX; //dU1/dy

```

```

U2_X:=(Net[i+1,j].U2[0] - Net[i,j].U2[0] + Net[i+1,j+1].U2[0] - Net[i,j+1].U2[0])/2/StepX; //dU2/dx
U2_Y:=(Net[i,j+1].U2[0] - Net[i,j].U2[0] + Net[i+1,j+1].U2[0] - Net[i+1,j].U2[0])/2/StepX; //dU2/dy
//вычисление сумм
SUM_11:=C11[B]*U1_X + C12[B]*U2_Y + C16[B]*(U1_Y+U2_X);
SUM_22:=C21[B]*U1_X + C22[B]*U2_Y + C26[B]*(U1_Y+U2_X);
SUM_12:=C16[B]*U1_X + C26[B]*U2_Y + C66[B]*(U1_Y+U2_X);
//расчет пространственных производных скоростей в старом временном слое
N1_X:=(Net[i+1,j].U1[1] - Net[i,j].U1[1] + Net[i+1,j+1].U1[1] - Net[i,j+1].U1[1])/2/StepX; //dU1/dx
N1_Y:=(Net[i,j+1].U1[1] - Net[i,j].U1[1] + Net[i+1,j+1].U1[1] - Net[i+1,j].U1[1])/2/StepX; //dU1/dy
N2_X:=(Net[i+1,j].U2[1] - Net[i,j].U2[1] + Net[i+1,j+1].U2[1] - Net[i,j+1].U2[1])/2/StepX; //dU2/dx
N2_Y:=(Net[i,j+1].U2[1] - Net[i,j].U2[1] + Net[i+1,j+1].U2[1] - Net[i+1,j].U2[1])/2/StepX; //dU2/dy
//вычисление комбинированных производных (не нормированы на StepT)
D_11:=U1_X - N1_X;
D_22:=U2_Y - N2_Y;
D_12:=U1_Y - N1_Y + U2_X - N2_X;
//вычисление сумм
SS_11:=Nu11[B]* D_11 + Nu12[B]* D_22 + Nu16[B]* D_12;
SS_22:=Nu21[B]* D_11 + Nu22[B]* D_22 + Nu26[B]* D_12;
SS_12:=Nu16[B]* D_11 + Nu26[B]* D_22 + Nu66[B]* D_12;
//расчет тензора напряжений в новом временном слое
Net[i,j].S11[0]:=Net[i,j].S11[1]+ StepT*SUM_11 + SS_11;
Net[i,j].S22[0]:=Net[i,j].S22[1]+ StepT*SUM_22 + SS_22;
Net[i,j].S12[0]:=Net[i,j].S12[1]+ StepT*SUM_12 + SS_12;
end;

```